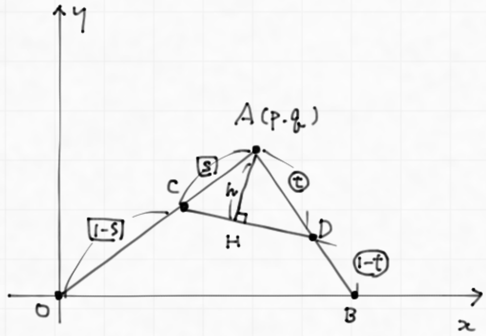
京都工芸繊維大学 2017

1



(1) $\vec{OC} = (1-s)\vec{a}$, $\vec{OD} = t\vec{b} + (1-t)\vec{a}$

$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \mathbf{(s-t)\vec{a} + t\vec{b}}$

(2) $\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 1 \times q = \frac{q}{2}$

$\triangle ACD = st \times \triangle OAB = \frac{1}{2}stq = \frac{1}{2}CD \times AH = \frac{1}{2}\ell h$

$\therefore\ h = \mathbf{\frac{stq}{\ell}}$

$\ell^2 = |\vec{CD}|^2 = (s-t)^2(p^2+q^2) + 2(s-t)t \cdot p + t^2$ $\quad (\because |\vec{a}|^2 = p^2+q^2,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = p,\ |\vec{b}|^2 = 1)$

$\ell = \mathbf{\sqrt{(s-t)^2p^2 + 2(s-t)tp + (s-t)^2q^2 + t^2}}$

(3) $h = \frac{stq}{\ell}$ だから ℓが最も小さくなったとき、hは最大.

$\ell^2 = \{(s-t)p+t\}^2 + (s-t)^2q^2$

(i) $s-t=0$ のとき、$\ell = t$ となり hはpの値にかかわらず一定値 sq となる

(ii) $s-t \neq 0$ のとき ℓは $p = \frac{-t}{s-t}$ のとき最小となり最小値は $|(s-t)q|$

このとき $h = \frac{stq}{|(s-t)q|} = \frac{st}{|s-t|}$

hの最大値は

$s \neq t$のとき $h = \frac{st}{|s-t|}$ 　 $s=t$のとき $h = sq$

2

(1) $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\theta)'}{\sin\theta} d\theta = \left[\log|\sin\theta|\right]_x^{\frac{\pi}{2}} = -\log|\sin x|$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \left\{ -\log(\sin x) \right\} = \infty$$

(2) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) d\theta \right\} = -\frac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{\sin^2 + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$l(t) = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 x}}\, dx = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$$

$\cos x = u$ とおく　$\frac{du}{dx} = -\sin x$

x	$t \to \frac{\pi}{2}$
u	$\cos t \to 0$

$$l(t) = \int_{\cos t}^{0} \frac{1}{\sin x} \times \left(-\frac{1}{\sin x}\right) du = \int_{\cos t}^{0} \frac{1}{u^2 - 1} du = \int_0^{\cos t} \frac{1}{1-u^2} du = \int_0^{\cos t} \left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} \right) \times \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\log|1-u| + \log|1+u| \right]_0^{\cos t} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\log \frac{1+\cos t}{1-\cos t} \right)}$$

(3) $\lim_{t \to +0} \left(\frac{1}{2}\log\frac{1+\cos t}{1-\cos t} + \log(\sin t) \right) = \lim_{t \to +0} \left\{ \frac{1}{2}\log \frac{1+\cos t}{1-\cos t} \sin^2 t \right\}$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{1}{2}\log\left(\frac{(1+\cos t)(1-\cos^2 t)}{1-\cos t} \right) = \lim_{t \to +0} \frac{1}{2}\log(1+\cos t)^2 = \log(1+\cos 0) = \boldsymbol{\log 2}$$

3

(1) $f'(x) = \dfrac{\tan x - x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \dfrac{\cos x\sin x - x}{\sin^2 x}$

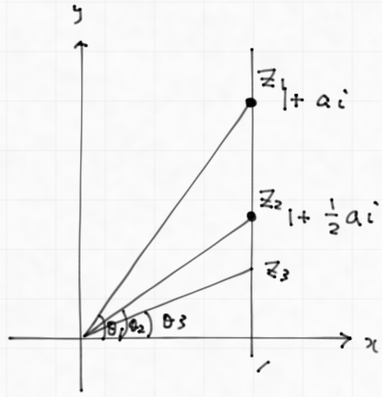
$\cos x\sin x - x = g(x)$ とすると

$g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - x$　　$g'(x) = \cos 2x - 1 \leqq 0$　よって $g(x)$ は単調に減少する.

$g(0) = 0 - 0 = 0$ なので　　$g(x) < g(0) = 0$

よって $g(x)$ は $x > 0$ で常に負であり. $f'(x)$ も負.

よって $f(x)$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で単調に減少する



(2) $\tan\theta_n = \dfrac{\frac{a}{n}}{1} = \dfrac{a}{n}$

(1) より $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で $f(x)$ は単調に減少し. $0 < \theta_n < \theta_{n+1} < \frac{\pi}{2}$

だから.

$$\frac{\theta_n}{\tan\theta_n} > \frac{\theta_{n+1}}{\tan\theta_{n+1}}$$

ここに $\tan\theta_n = \frac{a}{n}$, $\tan\theta_{n+1} = \frac{a}{n+1}$ を代入

$$\frac{n\theta_n}{a} > \frac{(n+1)\theta_{n+1}}{a}$$

a は正の実数だから　$n\theta_n > (n+1)\theta_{n+1}$ が成り立つ

(3) $n\theta_n = \dfrac{a\theta_n}{\tan\theta_n} = a\cdot\dfrac{\theta_n}{\sin\theta_n}\times\cos\theta_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n \leqq \lim\limits_{n\to\infty}\tan\theta_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n} = +0$ だから　$n\to\infty$ のとき $\theta_n\to +0$

よって $\lim\limits_{n\to\infty} n\theta_n = \lim\limits_{\theta_n\to+0}\left(a\dfrac{\theta_n}{\sin\theta_n}\cos\theta_n\right) = a\cdot 1\cdot 1 = a$

$$\lim_{n\to\infty}(r_n)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{a^2}\times\frac{a^2}{2n}} = e^0 = 1$$

4

(1) 右辺−左辺 $= p_1q_1 + p_2q_2 - (p_1q_2 + p_2q_1)$

$= p_1(q_1 - q_2) + p_2(q_2 - q_1) = (p_2 - p_1)(q_2 - q_1)$ …①

ここで $p_1 < p_2$, $q_1 < q_2$ だから $p_2 - p_1 > 0$, $q_2 - q_1 > 0$ であり ①は正の値をとる

よって $p_1q_2 + p_2q_1 < p_1q_1 + p_2q_2$ が成り立つ

(2) $b_i > b_j$, $(1 \leqq i < j \leqq n)$ を満たす i, j が存在しないと仮定すると

$1 \leqq k < n$ を満たす整数 k に対し、 $b_k < b_{k+1}$ となり、これは

$b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_n$

が成り立っていることを示しているが、そのような順列は1つしかなく、$a_1, a_2 \ldots a_n$ と一致する。

よって $b_i > b_j$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$ を満たすような i, j が存在する。

(3) $b_1, b_2 \ldots b_n$ について、(2)より、 $b_i > b_j$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$ を満たす整数 i, j は必ず存在する。ここで $\{b_n\}$ の中の b_i と b_j の値をとりかえたものを $\{c_n\}$ とする $(c_i = b_j,\ c_j = b_i)$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k c_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_i c_i + a_j c_j - a_i b_i - a_j b_j$$

$$= a_i b_j + a_j b_i - a_i b_i - a_j b_j \quad \cdots ②$$

ここで $i < j$ のとき $a_i < a_j$, $b_j < b_i$ だから (1)より、

$$a_i b_i + a_j b_j < a_i b_j + a_j b_i$$

が成り立つので ② は正の値をとる。

よって

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k c_k$$

となるような順列 $c_1, c_2 \ldots c_n$ が存在することが示された。

---

(3)の結論より、順列 $b_1 \ldots b_n$ を用いて

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

が成り立つことが示される。