# 同志社大学 全学部 2022

**1** (1) 1または2の目を $\boxed{2}$, 3以上の目を $\boxed{1}$ と表す.

$$p_1 = \overset{\boxed{1}}{\frac{4}{6}} = \frac{2}{3} \qquad p_2 = \overset{\boxed{1}\boxed{1}}{\left(\frac{4}{6}\right)^2} + \overset{\boxed{2}}{\frac{2}{6}} = \frac{7}{9} \qquad p_2 - p_1 = \frac{7}{9} - \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{1}{9}}$$

$p_4$について $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$, $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}$, $\boxed{2}\boxed{2}$ の3つのケースが考えられる

$$\left(\frac{4}{6}\right)^4 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 \times \left(\frac{2}{6}\right) \times {}_3C_1 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{16}{81} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \mathbf{\frac{61}{81}}$$

$p_{n+2}$について.

1回目 $\boxed{1}$ のとき 残り $n+1$ となるので $\frac{4}{6} \times p_{n+1}$

1回目 $\boxed{2}$ のとき. 残り $n$ となるので $\frac{2}{6} \times p_n$

よって $p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n$ … ①

$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{3}(p_{n+1} - p_n)$ … ②

と変形できるので $a = \mathbf{-\frac{1}{3}}$

① は $p_{n+2} + \frac{1}{3}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n$ … ③

とも変形できる

② より. $p_{n+1} - p_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(p_2 - p_1) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ … ④

③ より $p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n = p_2 + \frac{1}{3}p_1 = \frac{7}{9} + \frac{2}{9} = 1$ … ⑤

⑤ - ④ $\frac{4}{3}p_n = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$$\therefore\ p_n = \mathbf{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$q_n = p_{n-1} \times \overset{\boxed{2}}{\frac{2}{6}} \times p_4 = \frac{1}{4}\left(3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \times \frac{1}{3} \times \frac{61}{81} = \mathbf{\frac{61}{324}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}$$

(2) $x^3=-8 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore\ x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$ 　　虚部が正なのは $1+\sqrt{3}i$ だから $\alpha$ の虚部は $\boldsymbol{\sqrt{3}}$

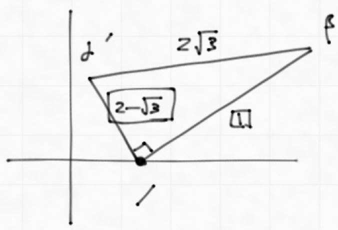
$\frac{\beta}{\alpha}=\beta'$, $\frac{\gamma}{\alpha}=\gamma'$ とすると

$|\beta-\gamma|=4\sqrt{3}$ より $\frac{|\beta-\gamma|}{|\alpha|}=\frac{4\sqrt{3}}{|\alpha|} \Leftrightarrow \left|\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}\right|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow |\beta'-\gamma'|=2\sqrt{3}$

$4+(\sqrt{3}-2+i)\beta'=(\sqrt{3}+2+i)\gamma'$

$$\gamma'=\frac{4}{\sqrt{3}+2+i}+\frac{\sqrt{3}-2+i}{\sqrt{3}+2+i}\beta'=\frac{4(\sqrt{3}+2-i)+\{3-(2-i)^2\}\beta'}{(\sqrt{3}+2)^2+1}$$

$$=\frac{8+4\sqrt{3}-4i+4i\beta'}{8+4\sqrt{3}}=1+\frac{4i}{8+4\sqrt{3}}(\beta'-1)$$




$$\frac{\gamma'-1}{\beta'-1}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}i$$

$\arg\left(\frac{\gamma'-1}{\beta'-1}\right)=\frac{\pi}{2}$ 　　$\left|\frac{\gamma'-1}{\beta'-1}\right|=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$

$|\beta'-1|=l$ とすると $|\gamma'-1|=(2-\sqrt{3})l$

$$l^2+\{(2-\sqrt{3})l\}^2=(2\sqrt{3})^2$$

$$l^2=\frac{12}{1+4+3-4\sqrt{3}}=\frac{3}{2-\sqrt{3}}=3(2+\sqrt{3})$$

$$l=\sqrt{6+3\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12+2\sqrt{27}}{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

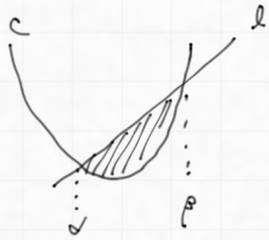
$\cos B=\frac{l}{2\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\cancel{3}\sqrt{6}+\cancel{3}\sqrt{2}}{2\cdot\cancel{6}_2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 　　$\angle B=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

$|\alpha-\gamma|=2|1-\gamma'|=\sqrt{2}(2-\sqrt{3})\frac{3+\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}(3-\sqrt{3})=\boldsymbol{3\sqrt{2}}-\sqrt{6}$

$|\beta-\gamma|=4\sqrt{3}$ が直径だから. $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

# 2

(1) Cとlの交点のx座標がα, βだから $x^2 = ax+b$ の解が α, β となる




$$x^2 - ax - b = (x-\alpha)(x-\beta)$$

より $a = \alpha+\beta$ , $b = -\alpha\beta$

(2) $36 = \int_\alpha^\beta \{f(x) - x^2\} dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ $\quad \therefore \beta - \alpha = 6$

(3) $V = \int_\alpha^\beta \pi\{f(x)\}^2 dx - \int_\alpha^\beta \pi(x^2)^2 dx$

$= \pi\int_\alpha^\beta (a^2x^2 + 2abx + b^2 - x^4) dx = \pi\left[\frac{1}{3}x^3 + abx^2 + b^2x - \frac{1}{5}x^5\right]_\alpha^\beta$

$= \pi\left(-\frac{1}{5}\beta^5 + \frac{a^2}{3}\beta^3 + ab\beta^2 + b^2\beta\right) - \pi\left(-\frac{1}{5}\alpha^5 + \frac{a^2}{3}\alpha^3 + ab\alpha^2 + b^2\alpha\right)$

$= \pi\left\{-\frac{1}{5}(\beta-\alpha)(\beta^4+\beta^3\alpha+\beta^2\alpha^2+\beta\alpha^3+\alpha^4) + \frac{a^2}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2) + ab(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) + b^2(\beta-\alpha)\right\}$

$= \pi(\beta-\alpha)\left\{-\frac{1}{5}\left(\beta^4+\alpha^4+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha\beta)^2\right) + \frac{a^2}{3}(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2) + ab(\alpha+\beta) + b^2\right\}$

ここで (2)より $\beta-\alpha=6$, 条件より $\alpha+\beta = 2c = a$ を代入していく

$\beta-\alpha=6$ と $\alpha+\beta=2c$ を辺々加えて $2\beta = 6+2c$ $\quad \beta = 3+c$ $\quad \alpha = c-3$ より

$\alpha\beta = c^2-9$

$\beta^4+\alpha^4 = (\beta^2+\alpha^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2(\alpha\beta)^2 = (4c^2-2c^2+18)^2 - 2(c^2-9)^2 = 2c^4+108c^2+162$

$\beta^3\alpha+\beta\alpha^3 = \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) = (c^2-9)(2c^2+18) = 2(c^4-9^2)$ $\quad , \; b = -\alpha\beta = 9-c^2$

$V = 6\pi\left\{-\frac{1}{5}\left(2c^4+108c^2+162+2(c^4-9^2)+(c^2-9)^2\right) + \frac{a^2}{3}(2c^2+18+c^2-9) + 2c(9-c^2)\cdot 2c + (9-c^2)^2\right\}$

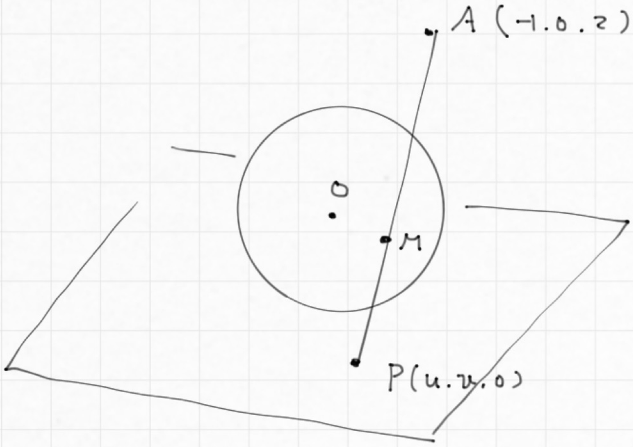
$= 6\pi\left\{-\frac{1}{5}(5c^4+90c^2+81) + \frac{a^2}{3}(3c^2+9) + 4c^2(9-c^2) + 81 - 18c^2 + c^4\right\}$

$= 6\pi\left(\cancel{-c^4} \cancel{-18c^2} - \frac{81}{5} + \cancel{4c^4} + 12c^2 + \cancel{36c^2} \cancel{-4c^4} + 81 \cancel{-18c^2} \cancel{+c^4}\right)$

$= 6\pi\left(12c^2 + \frac{324}{5}\right)$

$c = 0$ のとき Vは最小（このとき、$\alpha = -3, \beta = 3$）最小値は $\frac{1944}{5}\pi$

**3**




(1) $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AP}$ より $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{AP}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OP}$$

$$= (1-t)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

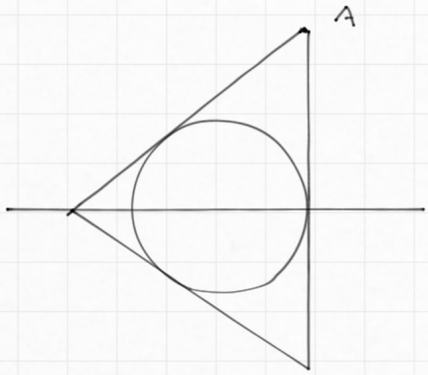
$$= \boldsymbol{(t-1+tu,\ tv,\ 2-2t)}$$

MがS上にあるとき

$$(t-1+tu)^2 + (tv)^2 + (2-2t)^2 = 1$$

$$t^2 + 1^2 + t^2u^2 - 2t + 2t^2u - 2tu + t^2v^2 + 4 - 8t + 4t^2 = 1$$

$$t^2(5+u^2+2u+v^2) + t(-10-2u) + 4 = 0 \quad \cdots ①$$




①が重解をもつとき、APはSに接するので. 判別式をDとして

$$D/4 = (u+5)^2 - 4(u^2+v^2+4u+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{3u^2 + 4v^2 - 2u - 5 = 0}$$

(2) Bは $xy$ 平面に対してAと対称な点、.

**B(−1. 0. −2)**

(3) $3u^2+4v^2-2u-5=0$ より

$$3\left(u-\frac{1}{3}\right)^2 + 4v^2 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{\left(u-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{v^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

これは中心 $(u.v) = \left(\frac{1}{3}.0\right)$ のだ円で

$-\frac{2}{\sqrt{3}} \leqq v \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}$ だから. 格子点として考えられるのは $v = -1.0.1$ のみ.

$v=1$ のとき. $3u^2-2u-1=0 \Leftrightarrow (3u+1)(u-1)=0$

　$u=1$ のときのみ. $u.v$ はいずれも整数 $(u.v) = (1,1)$

$v=0$ のとき. $3u^2-2u-5=0 \Leftrightarrow (3u-5)(u+1)=0$ より

　$u=-1$ のときのみ. $u.v$ はいずれも整数 $(u.v) = (-1.0)$

$v=-1$ のとき. $(u.v) = (1.-1)$

以上よりH上の格子点は $(x.y.z) =$ **(1, 1, 0), (−1, 0, 0). (1, −1, 0)**

(4) (1.1.0)とAとの距離は 3
(−1.0.0)とAとの距離は 2
(1.−1.0)とAとの距離は 3
(1.1.0)とBとの距離は 3
(−1.0.0)とBとの距離は 2
(1.−1.0)とBとの距離は 3

(1.1.0)と(−1.0.0)との距離は $\sqrt{5}$
(1.1.0)と(1.−1.0)との距離は 2
(−1.0.0)と(1.−1.0)との距離は $\sqrt{5}$

以上より. **C(1.1.0), D(1,−1,0)**

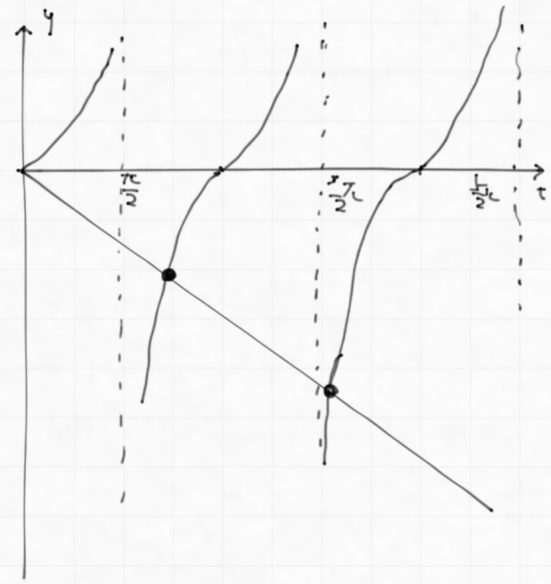
**E(−1.0.−2)** とすれば条件を全て満たす

4

(1) $g'(t) = -4t\sin t + (1-2t^2)\cos t - \cos t + t\sin t$

$= \mathbf{-3t\sin t - 2t^2\cos t}$

(2) $g'(t) = -t(3\sin t + 2t\cos t)$



$t \neq 0$ なので $3\sin t + 2t\cos t = 0$ について考える

$\cos t = 0$ のとき上式は成立しない.

$\cos t \neq 0$ のとき. $-\frac{2}{3}t = \tan t$

$y = -\frac{2}{3}t$ と $y = \tan t$ のグラフは右のようになるので. $-\frac{2}{3}t = \tan t$ となる $t$ は 2つ存在する.

$\therefore g'(t) = 0$ を満たす $t$ は **2つ** 存在する

(3) (2) の $g'(t) = 0$ の解を $\alpha.\beta$ とする ($\alpha < \beta$ とする)

$g(t)$ の増減は右のようになる

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $\frac{5}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $g(t)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

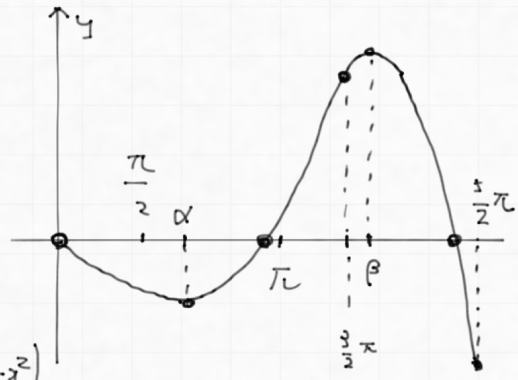
$g(0) = 0$, $g(\frac{5}{2}\pi) = (1 - \frac{25}{4}\pi^2)\cdot 1 < 0$

$g'(\beta) = 0$ だから $3\sin\beta + 2\beta\cos\beta = 0$ (1) より $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$

$g(\frac{3}{2}\pi) = (1 - \frac{9}{2}\pi^2)\cdot(-1) = \frac{9}{2}\pi^2 - 1 > 0$

以上より $y = g(t)$ のグラフは右のようになり.

$0 < t < \frac{5}{2}\pi$ の範囲で $g(t) = 0$ となる $t$ は **2つ** 存在する.



(4) $f_n(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{\pi}{(2n+1)^2}x^2\right)$

$\frac{d}{dx}f_n(x) = -\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{\pi}{(2n+1)^2}x^2\right) + \cancel{\frac{1}{x}} \times \frac{2\pi \cancel{x}}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{\pi}{(2n+1)^2}x^2\right)$

$\frac{d^2}{dx^2}f_n(x) = +\frac{2}{x^3}\sin\left(\frac{\pi}{(2n+1)^2}x^2\right) - \frac{1}{x^2}\times\frac{2\pi x}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{\pi}{(2n+1)^2}x^2\right) - \frac{2\pi}{(2n+1)^2}\times\frac{2\pi x}{(2n+1)^2}\sin\left(\frac{\pi}{(2n+1)^2}x^2\right)$

$x^3\frac{d^2}{dx^2}f_n(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{(2n+1)^2}x^2\right) - \frac{2\pi x^2}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{\pi}{(2n+1)^2}x^2\right) - \frac{4\pi^2x^4}{(2n+1)^4}\sin\left(\frac{\pi}{(2n+1)^2}x^2\right)$

$= 2\sin t - 2t\cos t - 4t^2\sin t = \mathbf{2g(t)}$

(5) (4) より $\frac{d^2}{dx^2}f_n(x) = \frac{2}{x^3}g(t)$

$0 < x < 5$ のとき $0 < t < \frac{25\pi}{(2n+1)^2}$

$0 < x < 5$ のとき. $x^3$ は常に正なので. $f_n(x)$ の変曲点が. $0 < x < 5$ の範囲に唯1つ存在するための条件は $0 < t < \frac{25\pi}{(2n+1)^2}$ の範囲で $g(t)$ が 1つ解を持ち. その前後で $g(t)$ の符号が変化することである

$g(\pi) = \pi > 0$

$g\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \left(1 - \frac{9}{8}\pi^2\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{9}{8}\pi^2 + \frac{3}{4}\pi\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{9}{8}\pi\left(\pi - \frac{2}{3}\right)\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{9}{8} \cdot 3\left(4 - \frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{45}{4}\right) < 0$

(ア)のグラフより $g(t) = 0$, $t > 0$ となる $t$ で最小のものを $p$ とすると $\frac{3}{4}\pi < t < \pi$

$g(2\pi) = (1 - 8\pi^2) \times 0 - 2\pi = -2\pi < 0$.

(ア)のグラフより $g(t) = 0$, $t > 0$ となる $t$ で2番目に小さいものを $q$ とすると $\frac{3}{2}\pi < q < 2\pi$

$n = 1$ のとき. $0 < t < \frac{25}{3^2}\pi$ だから $q$ も範囲に含まれるので不適

$n = 2$ のとき $0 < t < \pi$ だから. $p$ は範囲内だが. $q$ は範囲外で条件を満たす.

$n = 3$ のとき $0 < t < \frac{25}{49}\pi$ だから. $p \cdot q$ はいずれも範囲外なので不適

$n \geqq 4$ のとき $p \cdot q$ はいずれも範囲外なので不適

よって $n = 2$ のときのみ題意を満たす.