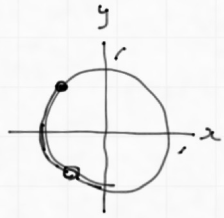
東京大学2022

1

(1) $f'(x) = -\sin x \log(\cos x) + \sin x + \cos x \times \dfrac{-\sin x}{\cos x} + \cos x \log(\cos x)$



$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)\log(\cos x)$$

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$0 < \cos x \leqq 1$,　$-1 < \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{3}{4}\pi\right) < 1$

$f'(x) = 0$ となるのは $\cos x = 1$ すなわち $x = 0$ のときと．$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ すなわち $x = \dfrac{\pi}{4}$ のときで．

$f(x)$の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$\left(\begin{array}{lll} 0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ のとき} & \log(\cos x) < 0 & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \\ \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき} & \log(\cos x) < 0 & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \end{array}\right)$$

したがって $f(x)$は　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で最小値をもつ

(2) $x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最小

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \log(\cos t)\,dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \log(\cos t)\,dt = \Big[\sin t \log(\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \times \frac{-\sin t}{\cos t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\,dt = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos t} - \cos t\right)dt$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\,dt$ について　$\sin t = u$ とおくと　$\dfrac{du}{dt} = \cos t$,

t	$0 \to \frac{\pi}{4}$
u	$0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\,dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\cos t} \times \frac{1}{\cos t}\,du = -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u^2-1}\,du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log|u+1| - \log|u-1|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\left(\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2 = \log(\sqrt{2}+1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2 + \log(\sqrt{2}+1) - \Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2 + \log(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \mathbf{\log(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\log 2 - \sqrt{2}}$$

2

(1) (i) $n=3$のとき.

$a_2 = a_1^2+1 = 2$, $a_3 = 2^2+1=5$ であり. a_3は5の倍数

(ii) $n=3k$のとき

a_{3k}が5の倍数だと仮定する

$a_{3k+1} = a_{3k}^2+1 \equiv 0^2+1 \equiv 1 \pmod 5$

$a_{3k+2} = a_{3k+1}^2+1 \equiv 1^2+1 \equiv 2 \pmod 5$

$a_{3k+3} = a_{3k+2}^2+1 \equiv 2^2+1 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$

よって仮定の下で a_{3k+3}も5の倍数.

(i)(ii)より. 数学的帰納法により. nが3の倍数ならば a_nは5の倍数である

(2) (1)で調べたことを整理すると

$a_3 \equiv 0 \pmod{a_3}$

$a_4 \equiv 1 = a_1 \pmod{a_3}$

$a_5 \equiv 2 = a_2 \pmod{a_3}$

$a_6 \equiv 0 \pmod{a_3}$

これより $a_{k+n} \equiv a_n \pmod{a_k}$ となることが予測できるので. これを数学的帰納法で示す

(i) $n=1$のとき

$a_{k+1} = a_k^2+1 \equiv 1 \pmod{a_k}$ 成り立つ

(ii) $n=m$のとき $a_{k+m} \equiv a_m \pmod{a_k}$ が成り立つと仮定する

このとき $a_{k+(m+1)} = a_{k+m}^2+1 \equiv a_m^2+1 = a_{m+1}$

よって仮定の下で $n=m+1$でも予測は成り立つ

(i)(ii)より. 数学的帰納法により予測が正しいことが示された.

$a_{k+1} \equiv a_1$, $a_{k+2} \equiv a_2 \dots a_{k+(k-1)} \equiv a_{k-1} \pmod{a_k}$であるが. $a_1 \sim a_{k-1}$まではa_kより小さい正の整数なのでa_kの倍数ではない.

$a_{k+k} \equiv a_k \equiv 0 \pmod{a_k}$

だから $n=2k$のとき a_nはa_kの倍数. $n>k$でも同様だから. a_nがa_kの倍数になるための必要十分条件は nがkの倍数であることである **$n=km$ (mは自然数)**

(3) (2)より $8088 = 2022 \times 4$ だから a_{8088}はa_{2022}の倍数

$$(a_{8091})^2 = (a_{8090}^2+1)^2 = ((a_{8089}^2+1)^2+1)^2 = (((a_{8088}^2+1)^2+1)^2+1)^2$$

$$\equiv (((0^2+1)^2+1)^2+1)^2 \pmod{a_{2022}}$$

$$\equiv 25 \pmod{a_{2022}} \quad \dots ①$$

ここで $a_1 \equiv 1 \pmod{25}$ $a_2 \equiv 1^2+1 \equiv 2 \pmod{25}$ $a_3 \equiv 2^2+1 \equiv 5 \pmod{25}$

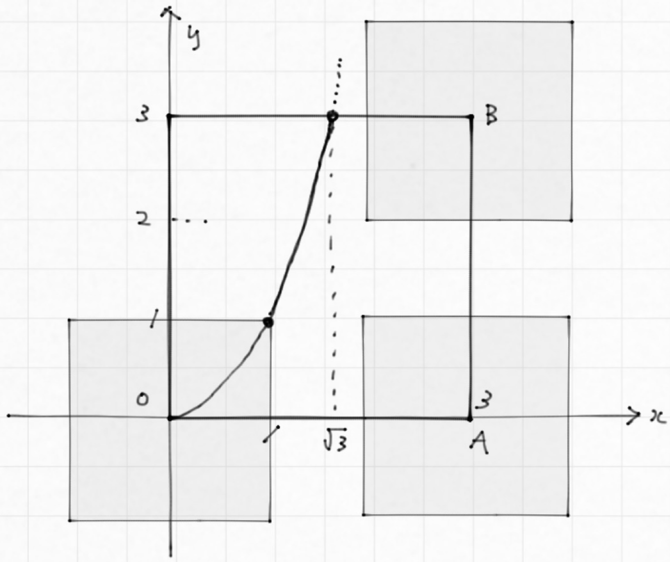
$a_4 \equiv 5^2+1 \equiv 1 \pmod{25}$ $a_5 \equiv 2$, $a_6 \equiv 5, \dots$ となるので. $a_n \equiv 0 \pmod{25}$とはならない.

①より. a_{2022}と$(a_{8091})^2$の最大公約数は a_{2022}と25の最大公約数に等しく. かつ a_{2022}は25の倍数ではなく. (1)よりa_{2022}は5の倍数なので 最大公約数は**5**である

3

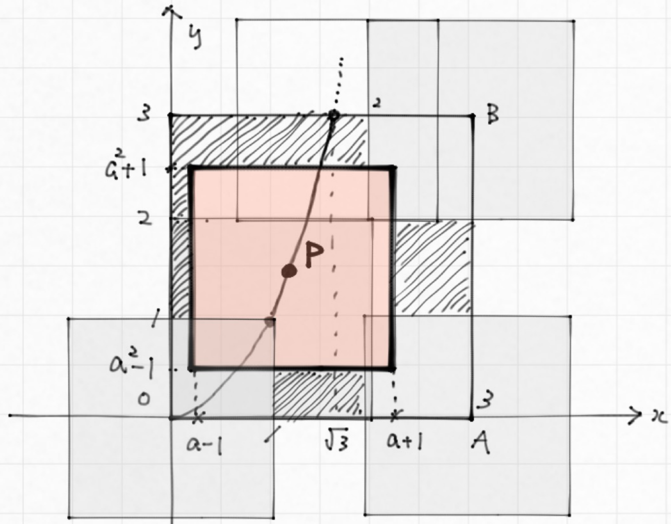
(1) 領域D、放物線 $y=x^2$、

O, A, B および、これらの点から十分に離れていない領域を図示すると右のようになる



よって点Pは $y=x^2$ 上の $1\leqq x\leqq\sqrt{3}$ の範囲に存在する　**$1\leqq a\leqq\sqrt{3}$**

(2) $a^2\leqq 2$ のとき、Qの存在し得る領域は右下グラフ斜線部



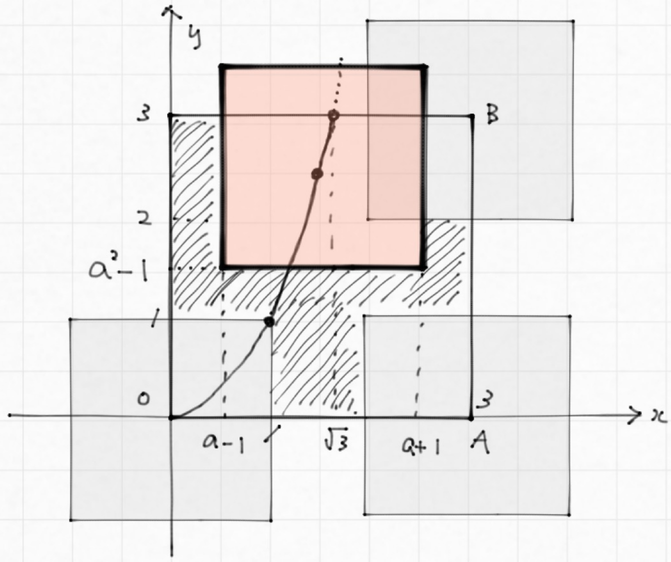
$$f(a)=(a^2-1)\times1+(a-1)\times1+(3-(a+1))\times1$$
$$+(a^2+1-2)(a-1)+2\times(3-(a^2+1))$$
$$=a^2-1+1+(a^2-1)(a-1)+2(2-a^2)$$
$$=\cancel{a^2}+a^3-\cancel{a^2}-a+1+4-2a^2$$
$$=a^3-2a^2-a+5$$

$a^2>2$ のとき、右最下グラフ斜線部

$$f(a)=(3-(a^2-1))(a-1)+(2-(a^2-1))(3-(a+1))$$
$$+(a^2-1-1)\times3+1\times1$$
$$=(4-a^2)(a-1)+(3-a^2)(2-a)+3(a^2-2)+1$$
$$=4a-4-\cancel{a^3}+a^2+\cancel{6}-3a-2a^2+\cancel{a^3}+3a^2-\cancel{6}+1$$
$$=2a^2+a-3$$

$$\therefore\ \boldsymbol{f(a)=\begin{cases}a^3-2a^2-a+5 & (1\leqq a\leqq\sqrt{2})\\ 2a^2+a-3 & (\sqrt{2}<a\leqq\sqrt{3})\end{cases}}$$

(3) $1\leqq a\leqq\sqrt{2}$ のとき



$f'(a)=3a^2-4a-1$

$f'(a)=0$ となるのは $a=\dfrac{2\pm\sqrt{4+3}}{3}$ …①

$f'(\sqrt{2})=3\cdot2-4\sqrt{2}-1=5-4\sqrt{2}<0$ だから、

①は $1\leqq a\leqq\sqrt{2}$ の範囲外

$f(a)$は常に負

$\sqrt{2}<a\leqq\sqrt{3}$ のとき、

$f'(a)=4a+1$　　$\sqrt{2}<a\leqq\sqrt{3}$ で $f(a)$は常に正

よって $f(a)$は $a=\sqrt{2}$ のとき最小となる

4 (1) Pを (p, q) とおき．Pを通って傾き m の直線を $y=m(x-p)+q$ と表す

$y=m(x-p)+q$ と $y=x^3-x$ を連立

$x^3-x=m(x-p)+q \iff x^3-x-mx+mp-q=0$

$f(x)=x^3-x-mx+mp-q$ とする

$f'(x)=3x^2-1-m$

$m>-1$ とすれば $f'(x)=0$ となる x が存在し $f(x)$ は極大値および極小値をもつ．

このとき $f'(x)=0$ となるのは $x=\pm\sqrt{\frac{m+1}{3}}$

$f\left(\sqrt{\frac{1+m}{3}}\right)=\frac{m+1}{3}\sqrt{\frac{m+1}{3}}-(m+1)\sqrt{\frac{m+1}{3}}+mp-q=-\frac{2(m+1)}{3}\sqrt{\frac{m+1}{3}}+mp-q$

$f\left(-\sqrt{\frac{1+m}{3}}\right)=\frac{2(m+1)}{3}\sqrt{\frac{m+1}{3}}+mp-q$

$f\left(\sqrt{\frac{1+m}{3}}\right)\times f\left(-\sqrt{\frac{1+m}{3}}\right)=(mp-q)^2-\frac{4}{9}\times\frac{(m+1)^3}{3}$

ここで $m\to\infty$ とすると上式は $-\infty$ に発散するので $f\left(\sqrt{\frac{1+m}{3}}\right)f\left(-\sqrt{\frac{1+m}{3}}\right)<0$ となる

m は必ず存在する．

よって $f(x)=0$ が3つの解をもつような m は存在し．これはPを通ってCと3点で交わる直線が

存在する．

(2) 3つの交点を持つ直線について，同じ傾きで変曲点を通る直線とCが囲む

2つの領域の面積が等しいので．変曲点を通らない直線とCで囲まれる2つ

の領域の面積が等しくなることはない．

したがって条件(ii)を満たす領域はPと変曲点を結ぶ直線がCと

3点で交わるかどうかできまる．

$y'=3x^2-1$ ， $y''=6x$

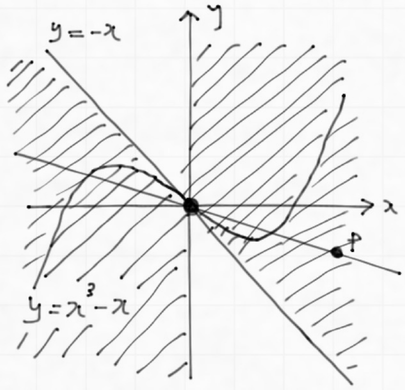
$y''=0$ となるのは $x=0$ だから 変曲点は $(0, 0)$

$(0, 0)$ における接線は $y=(3\times0^2-1)x$ より $y=-x$

したがってPが右グラフの斜線の領域にあれば

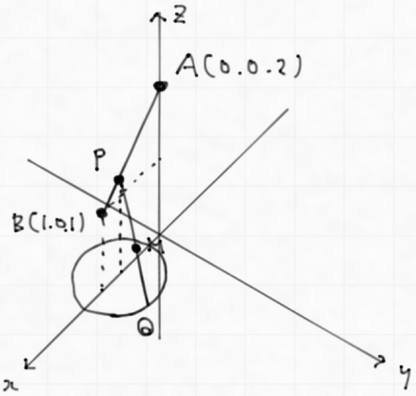
Pと原点を結ぶ直線はCと異なる3点で交わり．条件(ii)を

満たす．(原点を通る直線の傾きを変えて，交点を考える)



点Pのとりうる範囲は右グラフ斜線部(境界除くが原点は含む

5



点PがAB上を動くときに限定して考える

Pのz座標をpとする $(1\leqq p\leqq 2)$ と PがAB上にあるとき、

$AP:PB=2-p:p-1$ だから x座標は $\dfrac{2-p}{2-p+p-1}\times 1=2-p$

よって　$P(2-p,\ 0,\ p)$

Qはxy平面上の点なので $(s,t,0)$ とおくことができ、

$PQ=2$ より

$$(s-2+p)^2+t^2+p^2=2^2$$

$$\Leftrightarrow\quad (s-(2-p))^2+t^2=4-p^2$$

これは中心が $(2-p,\ 0,\ 0)$ 半径 $\sqrt{4-p^2}$ の円であり

PQの中点の軌跡は

$$(x-(2-p))^2+y^2=\frac{4-p^2}{4}\ ,\ z=\frac{p}{2}$$

と分かる。Mのz座標をuとして

$\dfrac{p}{2}=u$ より $p=2u$ を代入

$$(x-(2-2u))^2+y^2=1-u^2\ ,\quad \frac{1}{2}\leqq u\leqq 1$$

中心のx座標と半径をくらべる　$2-2u\geqq\sqrt{1-u^2}$ となるのは

$$\frac{1}{2}\leqq u\leqq\frac{4-\sqrt{3}}{3}$$

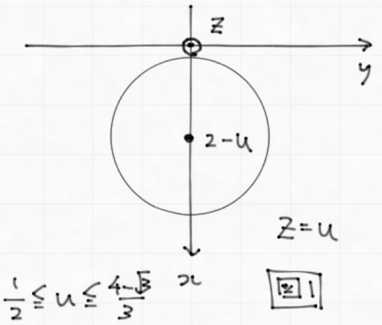


図1

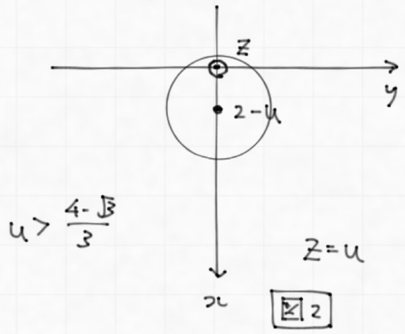


図2

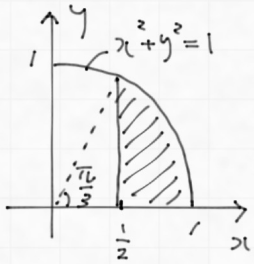
Mの軌跡は

$\dfrac{1}{2}\leqq u\leqq\dfrac{4-\sqrt{3}}{3}$ のとき 図1のようになり、$\dfrac{4-\sqrt{3}}{3}<u\leqq 1$ のとき 図2のようになる

ABを回転させたとき、Mの軌跡も同じように回転するので、もとめる体積は

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4-\sqrt{3}}{3}}\left\{\pi\left(2-2u+\sqrt{1-u^2}\right)^2-\pi\left(2-2u-\sqrt{1-u^2}\right)^2\right\}du+\int_{\frac{4-\sqrt{3}}{3}}^{1}\pi\left(2-2u+\sqrt{1-u^2}\right)^2-\pi\left(\sqrt{1-u^2}-(2-2u)\right)^2du$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}4(2-2u)\sqrt{1-u^2}\,du=8\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du+4\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-2u)\sqrt{1-u^2}\,du$$

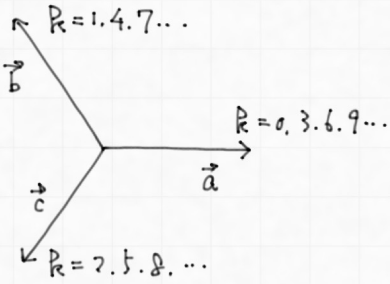


$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du$ は左図斜線部の面積に等しく　$\pi\times 1^2\times\dfrac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

$$V=8\pi\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)+4\pi\left[\frac{2}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{4}{3}\pi^2-\sqrt{3}\pi-\sqrt{3}\pi=\mathbf{\frac{4}{3}\pi^2-2\sqrt{3}\pi}$$

6

(1) $n=0,3,6,9,\cdots$ のときの $\overrightarrow{v_k}$ を $\vec{a}$，
$n=1,4,7,\cdots$ のときを $\vec{b}$，$n=2,5,8,\cdots$ のときを $\vec{c}$ と表す。



N=8 のとき X_8 が O にあるためには

① 裏が8回　② 表3回裏5回

③ 表6回裏2回

①のとき　$\left(\frac{1}{2}\right)^8$

②のとき　表を○ 裏を× で表すと

表がでたとき，直後に表がでてしまうと同じ向きに2度すすみ条件を満たせないことに注意して書き出す

○×○×○×××
$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

○×○××××○
$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

○××○××○×
$\vec{a}$ $\vec{c}$ $\vec{b}$

○××××○×○
$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

×○×○×○××
$\vec{b}$ $\vec{c}$ $\vec{a}$

×○××○××○
$\vec{b}$ $\vec{a}$ $\vec{c}$

××○×○×○×
$\vec{c}$ $\vec{a}$ $\vec{b}$

×××○×○×○
$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^8\times 8$

③のとき

○○×○○×○○
$\vec{a}$ $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ $\vec{c}$

のみ　$\left(\frac{1}{2}\right)^8$

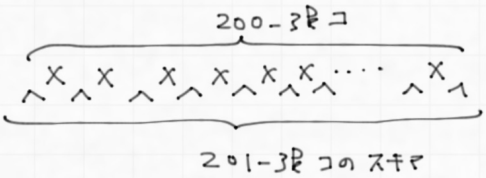
①，②，③より　$\left(\frac{1}{2}\right)^8(1+8+1)=\frac{5}{128}$

(2) $r\equiv 1 \pmod 3$ のとき $P_r=0$

$r\equiv 2 \pmod 3$ のとき $P_r=0$

$r=3k$ のとき，

表が $3k$ 回　裏は $200-3k$ 回



裏を並べて，その $201-3k$ コのスキマに表を挟む。

スキマのうち　$1,4,7,\cdots,199-3k$ 番目のスキマは $\vec{a}$ に対応し，

$2,5,8,\cdots,200-3k$ 番目のスキマは $\vec{b}$ に対応し，

$3,6,9,\cdots,201-3k$ 番目のスキマは $\vec{c}$ に対応する

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ それぞれ k 回ずつえらぶので スキマの選び方は　$\left({}_{67-k}H_k\right)^3=\left({}_{66}C_k\right)^3$

よって，　$P_r=P_{3k}=\frac{\left({}_{66}C_k\right)^3}{2^{200}}=\frac{\left({}_{66}C_{\frac{r}{3}}\right)^3}{2^{200}}$　（r が3の倍数のとき）

$$\frac{P_{3k+3}}{P_{3k}}=\frac{\left({}_{66}C_{k+1}\right)^3}{\left({}_{66}C_k\right)^3}=\left(\frac{\frac{66!}{(65-k)!(k+1)!}}{\frac{66!}{(66-k)!\,k!}}\right)^3=\left(\frac{66-k}{k+1}\right)^3$$

$\frac{66-k}{k+1}\geq 1$ となるのは $k\leq\frac{65}{2}$

よって $k\leq 32$ のときは $P_{3k+3}>P_{3k}$　　$P_3<P_6<\cdots<P_{96}<P_{99}>P_{102}>\cdots$　　∴ $r=99$ のとき最大