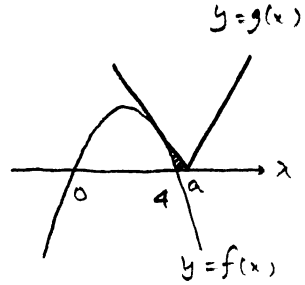
①



(1) $f(x)$ のグラフは右のようになっているので、
$f(x)$ と $g(x)$ のグラフの共有点が1つとなるのは、
右のように接するときに限られる。このとき、

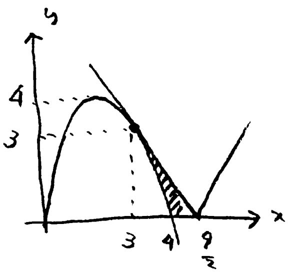
$f'(x) = -2x+4 = -2$ となるので、$x=3$ で接し、

$f(3)=3$ だから、$y=g(x)$ は $(3,3)$ を通る。

$$3 = 2|3-a|$$

a は4より大きくないといけないので、$3 = 2(a-3)$ より $\underline{a=\frac{9}{2}}$

(2) 面積を S とすると



$$S = \frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{2}-3\right)\times 3 - \int_3^4 -x^2+4x\,dx$$

$$= \frac{9}{4} - \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_3^4 = \frac{9}{4} - \left(-\frac{64}{3}+32\right) + (-9+18)$$

$$= \frac{9}{4}+\frac{64}{3}-23 = \frac{1}{12}(27+256-276) = \frac{7}{12}$$

(3) $a=\frac{9}{2}$ のとき接するので、

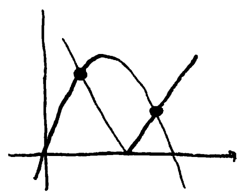
(i) $4 \leqq a < \frac{9}{2}$ のとき

$y=f(x)$ と $y=-2(x-a)$ $(x \leqq a)$ が2点で交わる

連立して $-x^2+4x = -2x+2a$

$x^2-6x+2a=0$ $\quad x = 3\pm\sqrt{9-2a}$

(ii) $0<a<4$ のとき、



右グラフのようになるので、

$$\begin{cases} -x^2+4x = -2x+2a & (x<a) \\ -x^2+4x = 2x-2a & (x>a) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $x = 3-\sqrt{9-2a}$, $1+\sqrt{1+2a}$

以上より 2点で交わる条件は $0<a<\frac{9}{2}$

交点の x 座標は $0<a<4$ のとき $x=3-\sqrt{9-2a}$, $1+\sqrt{1+2a}$

$4\leqq a<\frac{9}{2}$ 〃 $x = 3\pm\sqrt{9-2a}$

②

(1) $a_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$. $a_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$

$x_2 + y_2 i = (3+i)(7+i) = 20 + 10i$ $\quad \therefore \underline{x_2 = 20,\ y_2 = 10}$

$a_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$.

$x_3 + y_3 i = (20+10i)(13+i) = 260 - 10 + 150i = 250 + 150i$

$\therefore \underline{x_3 = 250,\ y_3 = 150}$

(2)

(i) $n = 1$のとき

$x_1 + y_1 i = 3 + i$ だから $x_1 = 3,\ y_1 = 1$. $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{1+2}$

よって成立する.

(ii) $n = k$のとき

$\dfrac{y_k}{x_k} = \dfrac{k}{k+2}$ が成り立つと仮定する.

$$x_{k+1} + y_{k+1} i = (x_k + y_k i)(a_{k+1} + i)$$
$$= (x_k + y_k i)\left((k+1)^2 + (k+1) + 1 + i\right)$$
$$= (k^2+3k+3)x_k - y_k + (k^2+3k+3)y_k i + x_k i$$

よって $x_{k+1} = (k^2+3k+3)x_k - y_k$. $y_{k+1} = (k^2+3k+3)y_k + x_k$.

$$\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} = \frac{(k^2+3k+3)y_k + x_k}{(k^2+3k+3)x_k - y_k} = \frac{(k^2+3k+3)\frac{y_k}{x_k} + 1}{k^2+3k+3 - \frac{y_k}{x_k}}$$

$$= \frac{(k^2+3k+3)\frac{k}{k+2} + 1}{k^2+3k+3 - \frac{k}{k+2}} = \frac{(k^2+3k+3)k + k+2}{(k+2)(k^2+3k+3) - k} = \frac{k^3+3k^2+4k+2}{k^3+5k^2+8k+6}$$

$$= \frac{(k+1)(k^2+2k+2)}{(k+3)(k^2+2k+2)} = \frac{k+1}{(k+1)+2}$$

よって仮定の下で $n = k+1$ のときも成り立つ.

(i)(ii)より、数学的帰納法により題意は示された.

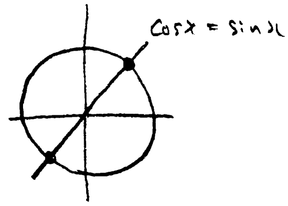
証明終

③ $e^{\sin x + \cos x} = f(x)$ とおく.

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x - \sin x)e^{\sin x - \cos x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (-\sin x - \cos x)e^{\sin x - \cos x} + (\cos x - \sin x)^2 e^{\sin x - \cos x}$$

$$= (1 - 2\sin x \cos x - \sin x - \cos x)e^{\sin x - \cos x}.$$



$\frac{dy}{dx} = 0$ となるのは　$\cos x - \sin x = 0$ のときで,

$$x = -\frac{3}{4}\pi,\ \frac{\pi}{4}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ となるのは　$1 - 2\cos x \sin x - \sin x - \cos x = 0$ のとき.

$\cos x + \sin x = t$ とすると　$t^2 = 1 + 2\cos x \sin x$ だから. 上式は

$$1 + (1 - t^2) - t = 0 \iff t^2 + t - 2 = 0 \iff t = 1, -2.$$

$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ より. $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ なので. $t = 1$.

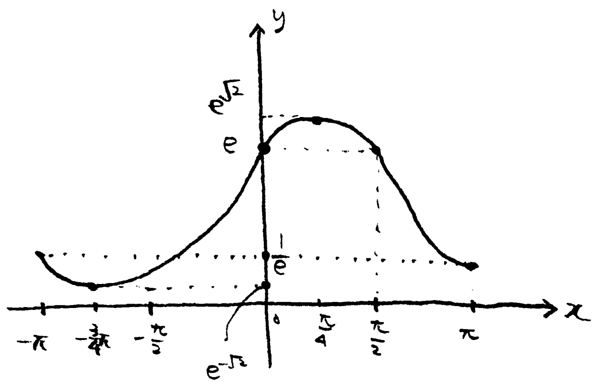
このとき　$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となるので. $x = 0, \frac{\pi}{2}$

以上より. $y = e^{\sin x + \cos x}$ の増減および凹凸は.

x	$-\pi$	…	$-\frac{3}{4}\pi$	…	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y''	$+$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↗		↘		↘	

$f(-\pi) = \frac{1}{e}$, $f\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = e^{-\sqrt{2}}$, $f(0) = e$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\sqrt{2}}$. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$, $f(\pi) = \frac{1}{e}$



$x = -\frac{3}{4}\pi$ のとき 極小値 $e^{-\sqrt{2}}$

$x = \frac{\pi}{4}$ のとき 極大値 $e^{\sqrt{2}}$

④

(1) Aの箱に赤2つの状態を ●● , 赤と白が1つずつの状態を ●○ 白2つを ○○ と表す.

●● から操作すると必ず ●○ になり.

○○ 〃 ●○ になる.

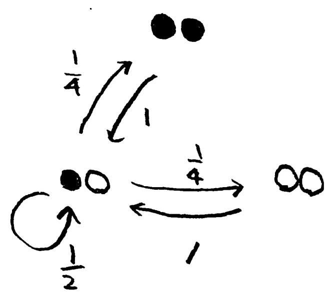
●○ から ●○ となる確率は、AB いずれも赤をとるか、いずれも白をとるときで

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

●○ から ●● になるのは. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

●○ から ○○ 〃 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

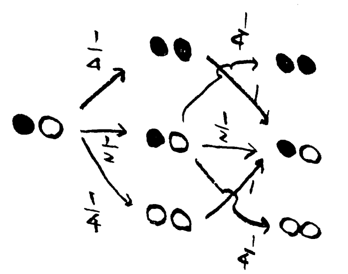
以上をまとめると右図のようになる



●○→●○

$p_1=\frac{1}{2}$

$p_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times1+\frac{1}{4}\times1=\frac{3}{4}$



(2)

n回目に ●○ のときは $\frac{1}{2}$ の確率で ●○

〃 ●● または ○○ のときは必ず ●○ になる

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+(1-p_n) \qquad \therefore p_{n+1}=1-\frac{1}{2}p_n$$

(3)

$p_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{2}{3}\right)$ より $\left\{p_n-\frac{2}{3}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{2}{3}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$$p_n-\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\therefore \underline{p_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}}$$