①

(1) Pを (x, y, z) とおくと $AP=2BP$ より.

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2} = 2\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2 = 4(x+2)^2+4(y-3)^2+4(z-1)^2$$

$$x^2-2x+y^2+6y+z^2+4z+14 = 4x^2+16x+4y^2-24y+4z^2-8z+56$$

$$3x^2+3y^2+3z^2+18x-30y-12z+42=0$$

$$x^2+y^2+z^2+6x-10y-4z+14=0$$

$$(x+3)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=24$$

これは中心 $(-3, 5, 2)$ 半径 $2\sqrt{6}$ の円を表している.

(2) $\log_2(\log_4 x)+\log_4(\log_2 x)<2.$

真数条件より. $\log_4 x>0.$ $x>0.$ $\log_2 x>0.$ $\Leftrightarrow$ $x>1$

底を2に揃えて

$$\log_2\left(\frac{\log_2 x}{2}\right)+\frac{\log_2(\log_2 x)}{2}<2$$

$$\log_2(\log_2 x)-1+\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)<2$$

$$\log_2(\log_2 x)<3\times\frac{2}{3}=2.$$

$$\log_2 x<2^2=4$$

$$x<2^4=16.$$

$\therefore$ $1<x<16$

(3)

$$5^{100}=(4+1)^{100}$$

$$={}_{100}C_0 4^{100}+{}_{100}C_1 4^{99}+\cdots+{}_{100}C_{98} 4^2+{}_{100}C_{99}\cdot 4+{}_{100}C_{100}$$

$$\equiv \frac{100\cdot 99}{2}\times 4^2+4\times 100+1 \quad (\mathrm{mod}\ 64)$$

$$\equiv 50\times 35\times 4^2+4\times 36+1 \quad (\ \ \text{〃}\ \ )$$

$$\equiv 50\times 48+17 \quad (\ \ \text{〃}\ \ )$$

$$\equiv 32+17 \quad (\ \ \text{〃}\ \ )$$

$$\equiv 49. \quad (\ \ \text{〃}\ \ )$$

49

64
37
64) 2400
192
480
32

(4) $\sqrt{i} \leqq j$ について、i は $1, 2, 3, \cdots, j^2$ の j^2 通り

$j \leqq n$ について、j は $1, 2, 3, \cdots, n$ の n 通り。

$$\sum_{j=1}^{n} \left(j^2\right) = \underline{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$ //

(5) $AB = BC = CA$ より

$$|z-2| = |z^3-3z-2| = |4z-z^3|$$

$$|z-2| = |(z-2)(z+1)^2| = |z(z+2)(z-2)|$$

$z=2$ とすると、$A=B$ となるので不適。$|z-2|$ で割って、

$$1 = |z+1|^2 = |z(z+2)|$$

$z+1=w$ とする

$$1 = |w|^2 = |w^2-1|$$

$$|w|=1,\quad |w^2-1|=1 \iff (w^2-1)(\bar{w}^2-1) = 1^2$$

$$\iff 1 - w^2 - \bar{w}^2 + 1 = 1 \iff w^2+\bar{w}^2 = 1$$

$|w|=1$ なので

$w = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると　$w^2+\bar{w}^2 = 1$ より

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta + \cos 2\theta - i\sin 2\theta = 1$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$$

$$\theta = \frac{1}{6}\pi + n\pi,\ \frac{5}{6}\pi + n\pi$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると　$\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

$$\therefore\ w = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

$$z = w-1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \pm \frac{1}{2}i,\ -1-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$$　（複号同順）

(6) $f(x) = \cos x + \int_0^{\pi} (\sin x \cos t - \cos x \sin t) f(t)\,dt$

$= \cos x + \sin x \underbrace{\int_0^{\pi} \cos t\, f(t)\,dt}_{=A} - \cos x \underbrace{\int_0^{\pi} \sin t\, f(t)\,dt}_{=B}$

上のようにA, Bとおくと.

$f(x) = \cos x + A \sin x - B \cos x$

$A = \int_0^{\pi} \cos t \left(\cos t + A \sin t - B \cos t\right) dt \quad \cdots ①$

$B = \int_0^{\pi} \sin t \left(\cos t + A \sin t - B \cos t\right) dt \quad \cdots ②$

①より.

$A = \int_0^{\pi} (1-B) \times \frac{1+\cos 2t}{2} + \frac{A}{2} \sin 2t \, dt$

$= \left[\frac{1}{2}(1-B)\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + \frac{A}{2} \times \frac{1}{2}(-\cos 2t) \right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2}(1-B)(\pi + 0) + \frac{A}{4}(-1) + \frac{A}{4} = \frac{1}{2}\pi(1-B)$

②より

$B = \int_0^{\pi} \frac{A}{2} \times (1 - \cos 2t) + \frac{1-B}{2} \times \sin 2t \, dt$

$= \left[\frac{A}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + \frac{1-B}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right) \right]_0^{\pi}$

$= \frac{A}{2}\pi$

$A = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi \times \frac{A}{2}\pi$

$4A + A\pi^2 = 2\pi$

$A = \frac{2\pi}{4+\pi^2}, \quad B = \frac{\pi^2}{4+\pi^2}$

$\therefore \underline{f(x) = \frac{2\pi}{4+\pi^2} \sin x + \frac{4}{4+\pi^2} \cos x}$

②

(1)

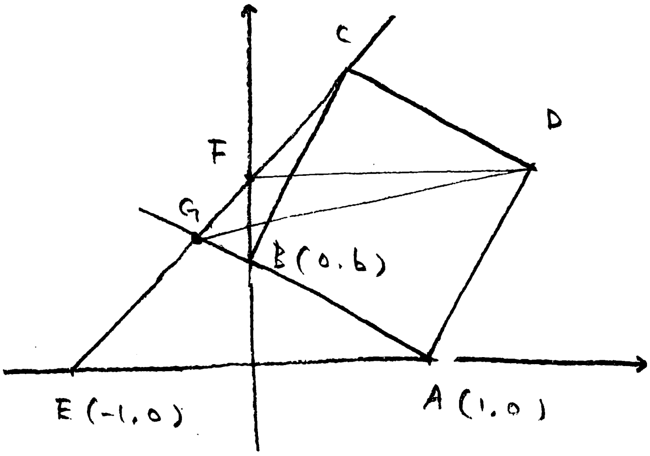
$\overrightarrow{AB} = (-1, b)$

これと直交し、同じ大きさのベクトルは $(b, 1)$ で、

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (b, 1)$

よって

$C(b, b+1),\ D(b+1, 1)$



(2) 直線CEは、 $y = \dfrac{b+1-0}{b+1}(x+1) = x+1$.

直線ABは $y = -bx + b$

交点は $x+1 = -bx+b \iff x = \dfrac{b-1}{b+1},\ y = \dfrac{2b}{b+1}$

$G\left(\dfrac{b-1}{b+1}, \dfrac{2b}{b+1}\right)$

(3) GFの垂直二等分線をもとめる。

傾きは -1、GFの中点はF(0, 1)なので、$\left(\dfrac{b-1}{2(b+1)}, \dfrac{3b+1}{2(b+1)}\right)$

$\therefore\ y = -x + \dfrac{b-1}{2(b+1)} + \dfrac{3b+1}{2(b+1)} = -x + \dfrac{2b}{b+1}$ …①

FDの垂直二等分線をもとめる。

F(0, 1), D(b+1, 1) より 中点は $\left(\dfrac{b+1}{2}, 1\right)$

$\therefore\ x = \dfrac{b+1}{2}$ …②

①, ② の交点は $y = -\dfrac{b+1}{2} + \dfrac{2b}{b+1} = \dfrac{-b^2-2b-1+4b}{2(b+1)} = \dfrac{-(b-1)^2}{2(b+1)}$

$\therefore$ 外接円の中心は

$$\left(\frac{b+1}{2}, \frac{-(b-1)^2}{2(b+1)}\right)$$

③

(1) $|x| \geqq \frac{\pi}{2}$のとき、$|\sin(x+a)| \leqq 1$なので、$x = \sin(x+a)$は成り立たない。以下 $|x| \leqq \frac{\pi}{2}$の範囲で考える。

$g(x) = \sin(x+a) - x$ とおく

$g(x) = \cos(x+a) - 1 \leqq 0$

だから、$g(x)$は $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$において単調に減少する

また $g(-\frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}+a) + \frac{\pi}{2} > -\cos a + 1 \geqq 0$

$g(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}+a) - \frac{\pi}{2} < \cos a - 1 \leqq 0$

以上より、$g(x)$は $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$の範囲で1度だけ$x$軸と交わる。

これは、命題Pが真であることを示している。

(2) $n=0$のとき　$f(0) = \sin(f(0)+0)$　$\therefore f(0) = 0$.

$n=1$　〃　$f(\pi) = \sin(f(\pi)+\pi)$

$f(\pi) = -\sin f(\pi)$　$\therefore f(\pi) = 0$

$n=2$　〃　$f(2\pi) = \sin(f(2\pi)+2\pi)$

$= \sin f(2\pi)$　$\therefore f(2\pi) = 0$

(3) $f(x)$について

$f(x) = \sin(f(x)+x)$ …①

$\cos(x+f(x)) < 1$を示すということは、$\cos(x+f(x)) \neq 1$を示すことと同値で、これは、$x+f(x) \neq + 2n\pi$を示すことと同じ

仮に $x+f(x) = + 2n\pi$ (nは整数) とすると

$f(x) = -x + 2n\pi$

これを①に代入

$-x + 2n\pi = \sin 2n\pi = 0$

$x = 2n\pi$

しかし、$0 < x < 2\pi$なので、これを満たすxは存在しない

したがって仮定は矛盾しており　$x+f(x) \neq 2n\pi$ であり

$\cos(x+f(x)) \neq 1$.

すなわち　$\cos(x+f(x)) < 1$　が成り立っている

(4)
(i)　①の両辺を x で微分　$(0 < x < 2\pi)$

$$f'(x) = \cos(f(x)+x) \times (f'(x)+1)$$

$$f'(x)\left(1-\cos(f(x)+x)\right) = \cos(f(x)+x)$$

$$f'(x) = \frac{\cos\{f(x)+x\}}{1-\cos\{f(x)+x\}} \qquad (\because (3) より \cos\{f(x)+x) \neq 1)$$

$$\theta'(x) = 1+f'(x) = \frac{1}{1-\cos(x+f(x))} > 0 \quad (\because (3))$$

よって $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において $\theta(x)$ は増加している.

(ii)　(i)より $f'(x)=0$ となるのは. $\cos\{f(x)+x\}=0$ のときで,

$$x+f(x) = \frac{\pi}{2}+n\pi \quad (n は整数)$$

これを①に代入.

$$\frac{\pi}{2}+n\pi-x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}-x = 1 & x = \frac{\pi}{2}-1 \\ \frac{3}{2}\pi-x = -1 & x = \frac{3}{2}\pi+1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \left\{\frac{1}{1-\cos(x+f(x))}-1\right\}' = \frac{-\sin(x+f(x))(1+f'(x))}{\{1-\cos(x+f(x))\}^2}$$

$$= \frac{-\sin(x+f(x))}{\{1-\cos(x+f(x))\}^3} = \frac{-f(x)}{\{1-\cos(x+f(x))\}^3} \quad (\because ①)$$

$f(x)$ の増減, 凹凸は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi+1$	$\cdots$	2π
f'		$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	
f	0	↗	$+$	↘	0	↘	$-$	↗	0

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi+1$	$\cdots$	2π
f''	/	$-$	$-$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	/
f	0	↱	$+$	↷	0	↳	$-$	⤴	0

よって $f(x)$ は $x=\frac{\pi}{2}-1$ で最大となり, (4)(ii)より このとき

$$f\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \frac{\pi}{2} + \quad - \frac{\pi}{2} + 1 = \quad 1$$

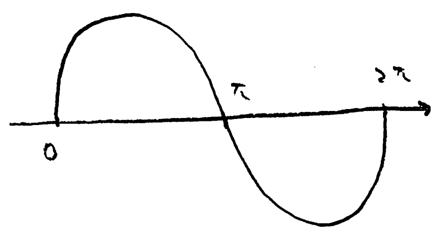
同様に $x = \frac{3\pi}{2}+1$ で最小となり

$$f\left(\frac{3\pi}{2}+1\right) = f\left(\frac{3}{2}\pi+1\right) = \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi - 1 = -1$$

最大値は 1, 最小値は -1

(iii)

$$S = \int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -f(x)\,dx$$



$x + f(x) = \theta$ とおくと, (

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1-\cos\{f(x)+x\}} = \frac{1}{1-\cos\theta}$$

x	$0 \to \pi$
θ	$0 \to \pi$

,

x	$\pi \to 2\pi$
θ	$0 \to 2\pi$

$$f(x) = \sin(f(x)+x) = \sin\theta$$

$$S = \int_0^{\pi} \sin\theta(1-\cos\theta)\,d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \sin\theta(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \left[-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi} - \left[-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= 1+1+1+1 = 4$$