①

(1) $g(x) = f'(x) = e^{x} - e^{-x}$, $g'(x) = e^{x} + e^{-x}$ $(= f(x))$

l について. $y = f'(a)(x-a) + f(a) \iff y = (e^{a} - e^{-a})x - ae^{a} + ae^{-a} + e^{a} + e^{-a}$

m について. $y = g'(a)(x-a) + g(a) \iff y = (e^{a} + e^{-a})x - ae^{a} - ae^{-a} + e^{a} - e^{-a}$

l と m を連立

$$(e^{a} - e^{-a})x - a(e^{a} - e^{-a}) + (e^{a} + e^{-a}) = (e^{a} + e^{-a})x - a(e^{a} + e^{-a}) + (e^{a} - e^{-a})$$

$$2e^{-a}x = 2ae^{-a} + 2e^{-a}$$

$$x = a + 1$$

このとき $y = (e^{a} - e^{-a})(a+1) - ae^{a} + ae^{-a} + e^{a} + e^{-a} = 2e^{a}$

$\therefore$ $\underline{R = (a+1,\ 2e^{a})}$ //

(2) $PR^2 - QR^2 = (a+1-a)^2 + (2e^{a} - e^{a} - e^{-a})^2 - \{(a+1-a)^2 + (2e^{a} - e^{a} + e^{-a})^2\}$

$= \cancel{1} + \cancel{e^{2a}} - 2 + \cancel{e^{-2a}} - \cancel{1} - \cancel{e^{2a}} - 2 - \cancel{e^{-2a}} = -4$

(3) $r(x) = g(x) - h(x) = e^{x} - e^{-x} - xe^{x} - xe^{-x}$ とおく.

$r'(x) = -x(e^{x} - e^{-x}) = -x\,g(x)$

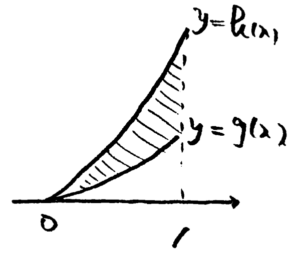
ここで $g'(x) = e^{x} + e^{-x} \geq 2\sqrt{e^{x} \cdot e^{-x}} = 2$ なので $g(x)$ は単調増加関数であり, また $g(0) = e^{0} - e^{-0} = 0$ より $0 \leq x \leq 1$ において $g(x) \geq 0$.

したがって. $r'(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ において $r'(x) \leq 0$.

$r(0) = 1 - 1 - 0 - 0 = 0$ なので. $r(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ において $r(x) \leq 0$

これは $0 \leq x \leq 1$ において. $y = h(x)$ が $y = g(x)$ の上側にあることを示している

したがって



$$V = \int_0^1 \pi\{h(x)\}^2 - \pi\{g(x)\}^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^1 x^2e^{2x} + x^2e^{-2x} + 2x^2 - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\,dx$$

ここで

$$\int x^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \int \frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C \quad (C\text{は積分定数})$$

$$\int x^2 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C \quad (C\text{は積分定数})$$

よって

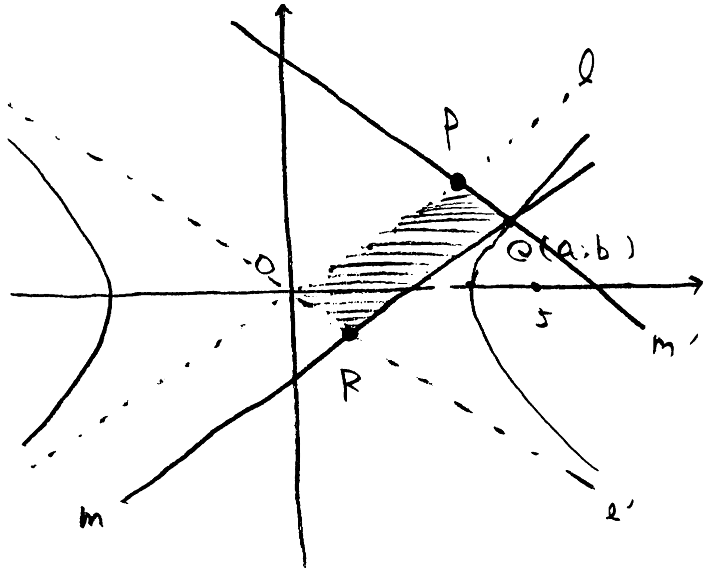
$$V = \pi\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}e^{2x} + 2x + \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$= \pi\left(\cancel{\frac{1}{2}e^2} - \cancel{\frac{1}{2}e^2} + \frac{1}{4}e^2 - \cancel{\frac{1}{2}e^{-2}} - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^2 + 2 + \cancel{\frac{1}{2}e^{-2}}\right)$$

$$-\pi\left(0 - 0 + \cancel{\frac{1}{4}} - 0 - 0 - \cancel{\frac{1}{4}} + 0 - \cancel{\frac{1}{2}} + 0 + \cancel{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^{-2} + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{12}\pi\left(32 - 3e^2 - 9e^{-2}\right)$$

②



(1) 漸近線が $y=\pm kx$ なので

Cは

$k^2x^2-y^2=t$ と表せる

このとき 焦点の x座標は

$\pm\sqrt{\dfrac{t}{k^2}+t} = \pm 5$

$\therefore\ t = 25\times\dfrac{k^2}{k^2+1}$

Cは $k^2x^2-y^2=\dfrac{25k^2}{k^2+1}$

$\therefore\ \underline{\dfrac{k^2+1}{25}x^2-\dfrac{k^2+1}{25k^2}y^2=1}$

(2) mは $y=k(x-a)+b$. m'は $y=-k(x-a)+b$.

lとm'の交点は $kx=-k(x-a)+b$ より $x=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{b}{2k}$ なので

$P\left(\dfrac{1}{2}a+\dfrac{b}{2k},\ \dfrac{1}{2}ka+\dfrac{1}{2}b\right)$

l'とmの交点は $-kx=k(x-a)+b$ より $x=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{b}{2k}$ なので

$R\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{b}{2k},\ -\dfrac{1}{2}ka+\dfrac{1}{2}b\right)$

(3) $S=2\times\triangle OPR=2\times\dfrac{1}{2}\left|\left(\dfrac{1}{2}a+\dfrac{b}{2k}\right)\left(-\dfrac{1}{2}ka+\dfrac{1}{2}b\right)-\left(\dfrac{1}{2}ka+\dfrac{1}{2}b\right)\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{b}{2k}\right)\right|$

$=\dfrac{1}{4}\left|\left(a+\dfrac{b}{k}\right)(-ka+b)-(ka+b)\left(a-\dfrac{b}{k}\right)\right|$

$=\dfrac{1}{4}\left|2ka^2-\dfrac{2b^2}{k}\right|=\dfrac{1}{2}\left|ka^2-\dfrac{b^2}{k}\right|$

ここで QはC上にあるので $k^2a^2-b^2=\dfrac{25k^2}{k^2+1}$ より $\dfrac{b^2}{k}=ka^2-\dfrac{25k}{k^2+1}$

これを上式に代入して

$S=\dfrac{1}{2}\left|ka^2-ka^2+\dfrac{25k}{k^2+1}\right|=\dfrac{25k}{2(k^2+1)}$

よってSは Qのとり方にかかわらず一定となる。

(4) $S = \dfrac{25}{2\left(k + \frac{1}{k}\right)} \leqq \dfrac{25}{2 \cdot 2\sqrt{k \cdot \frac{1}{k}}} = \dfrac{25}{4}$ (相加相乗)

等号は $k = \frac{1}{k}$ すなわち $k = 1$ のとき

∴ Sの最大値は $\frac{25}{4}$ で、そのときの k の値は 1

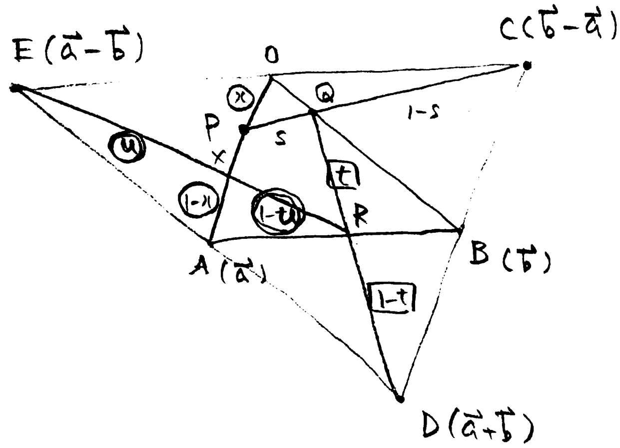
③

(1) QがPCを $s:1-s$ に内分するとおくと

$$\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OC} + (1-s)\overrightarrow{OP}$$

$$= s(\vec{b}-\vec{a}) + (1-s)x\vec{a}$$

$$= (x - sx - s)\vec{a} + s\vec{b}.$$



これがOB上にあるので

$$x - sx - s = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s = \frac{x}{1+x} \qquad \therefore \ \overrightarrow{OQ} = \frac{x}{1+x}\vec{b}$$

(2) RはQD上にあるので、QR:RD $= t:1-t$ とすると

$$\overrightarrow{OR} = t(\vec{a}+\vec{b}) + (1-t)\frac{x}{1+x}\vec{b} = t\vec{a} + \left(t + \frac{x}{1+x}(1-t)\right)\vec{b}$$

RはAB上にあるので、$\vec{a}$と$\vec{b}$の係数の和は1

$$t + t + (1-t)\frac{x}{1+x} = 1$$

$$2t + 2xt + x - xt = 1+x \qquad \therefore \ t = \frac{1}{2+x}$$

よって

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2+x}\vec{a} + \frac{1+x}{2+x}\vec{b}$$

(3) REとOAの交点をXとする。EX:XR $= u:1-u$ に内分するとする

$$\overrightarrow{OX} = u\overrightarrow{OR} + (1-u)\overrightarrow{OE} = \frac{u}{2+x}\vec{a} + \frac{1+x}{2+x}u\vec{b} + (1-u)\vec{a} - (1-u)\vec{b}.$$

これがOA上にあるので

$$\frac{1+x}{2+x}u - 1 + u = 0 \qquad u = \frac{2+x}{3+2x}$$

よって

$$\overrightarrow{OX} = \frac{2+x}{3+2x}\vec{a}.$$

これが、Pと一致するとき、$OP = x\vec{a}$ だから

$$x = \frac{2+x}{3+2x} \qquad \therefore \ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because\ 0 < x < 1)$$

(4) $\vec{OP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{a}$. $\vec{OQ} = \dfrac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\vec{b} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\vec{b}$.

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1\cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$|\vec{PQ}|^2 = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{a} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\vec{b}\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(\sqrt{5}-1)^2 + (3-\sqrt{5})^2 - 2(\sqrt{5}-1)(3-\sqrt{5})\times\frac{1}{2}\right\}$$

$$= 7-3\sqrt{5}$$

$\therefore$ $\underline{PQ^2 = 7-3\sqrt{5}}$ 。

④

(1) 2n回目で終了するとき、2, 4, 6 … 2n-2 回目の時までは

終了していないのだから、差は0となっている。

2回投げて差が0となるのは、表→裏 または 裏→表の2パターンで、

$$r(1-r)+(1-r)\times r = 2r-2r^2$$

これが 2n-2回目まで続き、最後の2回だけは上の事象がおこらない。

$$P_n = (2r-2r^2)^{n-1}\times\left(1-(2r-2r^2)\right) = \underline{(1-2r+2r^2)\{2r(1-r)\}^{n-1}}$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{N} nP_n - 2r(1-r)\sum_{n=1}^{N} nP_n = (1-2r+2r^2)\left\{\sum_{n=1}^{N} n\{2r(1-r)\}^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} n\{2r(1-r)\}^{n}\right\}$$

$$= (1-2r+2r^2)\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\{2r(1-r)\}^n - \{2r(1-r)\}^N\right\}$$

$$= (1-2r+2r^2)\left\{\frac{1-\{2r(1-r)\}^N}{1-2r(1-r)} - \{2r(1-r)\}^N\right\}$$

$$\sum_{n=1}^{N} nP_n = \frac{\cancel{1-2r+2r^2}}{\cancel{1-2r+2r^2}}\left[\frac{1-\{2r(1-r)\}^N}{1-2r+2r^2} - \{2r(1-r)\}^N\right]$$

ここで $2r(1-r) = -2(r-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}$ であり $0<r<1$ のとき

$$0<2r(1-r)<1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} nP_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} nP_n = \underline{\frac{1}{1-2r+2r^2}}$$

(3) $r=\frac{1}{4}$ のとき $P_n = \frac{5}{8}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{5}{8}\times\frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)^n}{1-\frac{3}{8}} = 1-\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

$g_n \geqq 0.999$ となるのは $1-\left(\frac{3}{8}\right)^n \geqq 0.999$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^n \leqq 0.001$$

両辺の常用対数をとる

$$\log_{10}\left(\frac{3}{8}\right)^n \leqq \log_{10}10^{-3}$$

$$n(\log_{10}3 - 3\log_{10}2) \leqq -3$$

$$n(0.4771 - 0.9030) \leqq -3$$

$$n \geqq \frac{3}{0.3259} = 7.04\cdots$$

したがって $g_n \geqq 0.999$ となる最小の n は $\underline{8}$.