1 (1) $f'(x) = e^x + xe^x - 2x - a$

$f'(0) = 1 - a = -1$ より $a = 2$.

(2) $f'(x) = e^x + xe^x - 2x - 2 = (e^x - 2)(x + 1)$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = -1, \log 2$

$f(x)$ の増減は下のようになる

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\left(\begin{aligned} f''(x) &= 2e^x + xe^x - 2 \\ f''(-1) &= e^{-1} - 2 < 0 \\ f''(\log 2) &= 2\log 2 > 0 \end{aligned} \right)$

よって $f(x)$ は $x = -1$ のとき極大値 $f(-1) = -\frac{1}{e} + 1$

$x = \log 2$ のとき極小値 $f(\log 2) = -(\log 2)^2$ をとる.

(3) $y = xe^x$, $y = x^2 + 2x + b$

と連立して. $xe^x = x^2 + 2x + b$

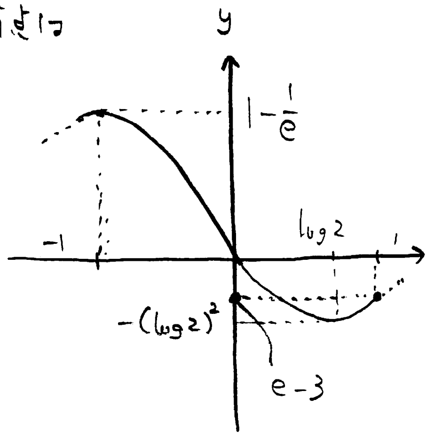
$\Leftrightarrow \quad xe^x - x^2 - 2x = b$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = b$.

と変形できるので. $y = f(x)$ と $y = b$ の交点の数を調べる.

$(f(1) = e - 3, \quad \log 2 < \log e = 1)$

グラフは右のようになるので 共有点は



$-(\log 2)^2 < b \leqq e - 3$ のとき

2コ

$e - 3 < b \leqq 1 - \frac{1}{e}$, $b = -(\log 2)^2$ のとき

1コ

$b > 1 - \frac{1}{e}$, $b < -(\log 2)^2$ のとき.

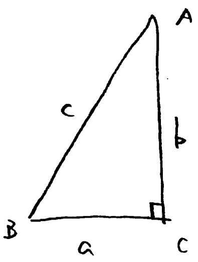
0コ

2

(1) 左辺 $= a^2+b^2 = (n^2-m^2)^2 + (2mn)^2 = n^4 - 2n^2m^2 + m^4 + 4n^2m^2 = n^4 + 2n^2m^2 + m^4$

$= (n^2+m^2)^2 = c^2 =$ 右辺.

よって $a^2+b^2=c^2$ が成立する.



(2) (1)より、$\triangle ABC$ は $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形

よって、その面積 S は　$S = \frac{1}{2}ab$

また内接円の半径 r を用いて　$S = r \times \frac{a+b+c}{2}$

よって　$\frac{1}{\cancel{2}}ab = \frac{a+b+c}{\cancel{2}} \times r$

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{(n^2-m^2)\times 2mn}{n^2-\cancel{m^2}+2mn+n^2+\cancel{m^2}} = \frac{\cancel{(n+m)}(n-m)\times \cancel{2}m\cancel{n}}{\cancel{2n}\cancel{(n+m)}} = m(n-m)$$

(3) $r = m(n-m)$

r が素数だとする。$n>m$ だから $n-m>0$ となるので、

$(m,\ n-m) = (1,\ r),\ (r,\ 1)$

のいずれかが成り立つ.

(i) $(m,\ n-m) = (1,\ r)$ のとき

$m=1,\ n = m+r = 1+r$

このとき　$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(n^2-m^2)\times 2mn = (2+r)\times r \times (1+r) = r(r+1)(r+2)$

(ii) $(m,\ n-m) = (r,\ 1)$ のとき

$m=r,\ n=1+r$

このとき　$S = (n+m)(n-m)nm = (1+2r)r(r+1)$

$\therefore$ $\underline{S = r(r+1)(r+2) \text{ または } r(r+1)(2r+1)}$

(4)

(i) $S = r(r+1)(r+2)$ のとき

$r,\ r+1,\ r+2$ は連続した3数なのでこのうちのいずれか1つは3の倍数であり、

また、少なくとも1つは偶数なので、S は6の倍数となる.

(ii) $S = r(r+1)(2r+1)$ のとき

$r,\ r+1$ は連続した2数だから、いずれか一方は偶数.

$r \equiv 0 \pmod 3$ のとき　S は6の倍数.

$r \equiv 1 \pmod 3$ のとき

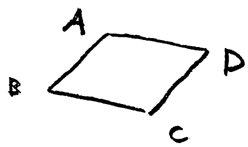
$2r+1 \equiv 2 \times 1+1 \equiv 0 \pmod 3$ となるので Sは 6の倍数

$r \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$r+1 \equiv 2+1 \equiv 0 \pmod 3$ となるので. Sは6の倍数.

以上(i)(ii)より. Sは6の倍数であることが示された.

$\boxed{3}$ (1) ABCD は正方形なので $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}$ //

(2) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = r$ とおく.

$AB = 1$ より $\quad |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 2r^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 1 \quad \cdots ①$

$BC = 1$ より $\quad |\vec{c} - \vec{b}|^2 = 2r^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} = 1 \quad \cdots ②$

$\angle ABC = 90$ より $\quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} + r^2 = 0$

$\cdots ③$

$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{AB}$

$= 2(\vec{a} + \vec{c})\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = 2(\vec{a}\cdot\vec{b} - r^2 + \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{c}) = 0$

$(\because ③)$

$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{AC}$

$= 2(\vec{a} + \vec{c})\cdot(\vec{c} - \vec{a}) = 2(|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2) = 0.$

よって $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ は α と垂直である.

$\boxed{4}$ (1) $A+B=\sum_{k=1}^{2n}k=\frac{1}{2}\times 2n\times(2n+1)=n(2n+1)$

ここでnが奇数ならば、$n(2n+1)$は奇数であるが、このとき、

$A=B$とすると、A,Bは整数とならず矛盾が生じる。

よって nが奇数のときは $A\neq B$ である。

(2) $A+B=n(2n+1)$ であるので、nが偶数ならば$A+B$も偶数。

A、Bは整数なので、このとき、A,Bは、ともに偶数となるか、

ともに奇数となるしかないが、そのとき、AとBの差はいずれも

偶数となるので、題意が成りたつ。

(3) $n=4$のとき　$A+B=4\times 9=36$.

$A=B$のとき、　$A=B=18$.　　　　1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

和が18となる組み合わせは

(1, 2, 7, 8), (1, 3, 6, 8), (1, 4, 5, 8), (1, 4, 6, 7)

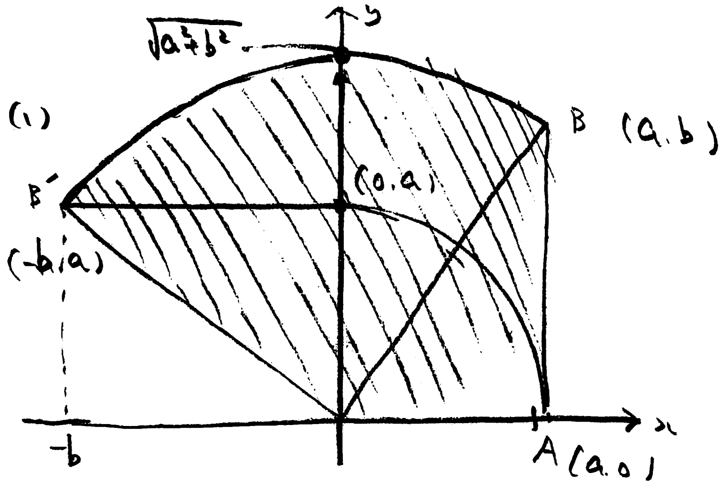
(2, 3, 5, 8), (2, 3, 6, 7), (2, 4, 5, 7), (3, 4, 5, 6)

の8通り。

8枚から4枚を選ぶ組みあわせは ${}_8C_4$ 通りなので、

$$\frac{8}{{}_8C_4}=\frac{\cancel{8}\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{8}\cdot 7\cdot\cancel{6}\cdot 5}=\underline{\frac{4}{35}}$$

5 (1)



(2) Bを90°回転させた点をB'とする。$\overset{\frown}{BB'}$は半径OBの円の弧であり、$x^2+y^2=a^2+b^2$と表すことができる。

よってもとめる体積は

$$V=\int_{-b}^{a}\pi y^2\,dx-\pi\times a^2\times b\times\frac{1}{3}$$

$$=\int_{-b}^{a}\pi(a^2+b^2-x^2)\,dx-\frac{1}{3}\pi a^2b$$

$$=\pi\left[(a^2+b^2)x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-b}^{a}-\frac{1}{3}\pi a^2b$$

$$=\pi(a^2+b^2)a-\frac{1}{3}\pi a^3+\pi(a^2+b^2)b-\frac{1}{3}\pi b^3-\frac{1}{3}\pi a^2b$$

$$=\frac{1}{3}\pi(3a^3+3ab^2-a^3+3a^2b+3b^3-b^3-a^2b)$$

$$=\frac{1}{3}\pi(2a^3+2a^2b+3ab^2+2b^3)$$

(3) $a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$ をVの式に代入.

$$V=\frac{1}{3}\pi(a^3+2a^2-3a+2)$$

$\frac{-2\pm\sqrt{4+9}}{3}$

これを$f(a)$とおくと

$$f'(a)=\frac{1}{3}\pi(3a^2+4a-3)$$

$f'(a)=0$となるのは$3a^2+4a+3=0$のとき。すなわち$a=\frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$のとき

$a>0$の範囲での増減は右のとおり

a	0	…	$\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$	…
f'		−	0	+
f		↘		↗

Vの最小値は $V=f\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)=\frac{124-26\sqrt{13}}{81}\pi$

そのときaは$\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$