① (1) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \left[x\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$= \pi\times 0 - 0\times 0 + \left[\cos x\right]_0^{\pi} = \underline{-2}$

$\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx = \left[x^2\sin x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

$= \pi^2\times 0 - 0^2\times 0 + 2\left[x\cos x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx$

$= -2\pi - 0 - 2\left[\sin x\right]_0^{\pi} = -2\pi - 0 + 0 = \underline{-2\pi}$

(2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+3x}{1-4x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{7x}{1-4x}\right)^{\frac{1-4x}{7x}}\right\}^{\frac{7}{1-4x}} = \underline{e^7}$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\cos t\,dt = I$ とおく。

$f(x) = \sin x + I$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t + I)\cos t\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2t + I\cos t\,dt = \left[-\frac{1}{4}\cos 2t + I\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= -\frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}I - \left(-\frac{1}{4}\times 1 + 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}I + \frac{1}{4}$

$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)I = \frac{1}{4}$ $\quad I = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ $\quad \therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\cos t\,dt = \underline{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

(4) $k=2$ のとき、$P_2(x) = x^2+ax+b$ とおけるので

$P_2'(x) = 2x+a$, $\quad P_2''(x) = 2$.

$(1-x^2)\times 2 - 2x(2x+a) + 2\times 3(x^2+ax+b) = 0$

$(-2a+6a)x + 2 + 6b = 0$

$a = 0$, $b = -\frac{1}{3}$ $\quad \therefore \underline{P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}}$

$k=3$ のとき、$P_3(x) = x^3+ax^2+bx+c$ とおけるので

$P_3'(x) = 3x^2+2ax+b$, $\quad P_3''(x) = 6x+2a$

$(1-x^2)(6x+2a) - 2x(3x^2+2ax+b) + 3\times 4(x^3+ax^2+bx+c) = 0$

$6x+2a-\cancel{6x^3}-2ax^2-\cancel{6x^3}-4ax^2-2bx+\cancel{12x^3}+12ax^2+12bx+12c = 0$

$6ax^2 + (6+10b)x + 2a + 12c = 0$

$a = 0$, $b = -\frac{3}{5}$, $c = 0$. $\quad \underline{P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x}$

(5) $\vec{AB}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{AC}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ の両方に垂直なベクトルとして $\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$ を考える

$\alpha$ は $6(x-1)+3y+2z=0$ と表せる。 $OD \perp \alpha$ だから、

$\vec{OD}=k\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$ とすると、O, D の中点は $\alpha$ 上にあるので

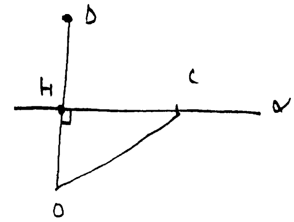
$$6(3k-1)+3\left(\frac{3}{2}k\right)+2(k)=0$$

$$\frac{49}{2}k=6 \qquad k=\frac{12}{49} \qquad \underline{D\left(\frac{72}{49},\ \frac{36}{49},\ \frac{24}{49}\right)}$$

$$\left|\frac{1}{2}\vec{OD}\right| = \frac{6}{49}\sqrt{6^2+3^2+2^2} = \frac{6\sqrt{49}}{49}$$

$$|\vec{OC}|=3. \quad |\vec{CH}| = \sqrt{3^2-\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{405}}{7} = \frac{3\sqrt{45}}{7} = \frac{9\sqrt{5}}{7}$$

$$\triangle OCD = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{6\sqrt{49}}}}{\cancel{49}} \times \frac{9\sqrt{5}}{\cancel{7}} \times 2 = \underline{\frac{54\sqrt{5}}{49}}$$



② (1) $x^2+xy+y^2=1 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2=1$

$x+\frac{1}{2}y=s$, $\frac{\sqrt{3}}{2}y=t$ とおくと $t^2+s^2=1$.

$$x^2+2xy = (s-\frac{1}{2}y)^2+2(s-\frac{1}{2}y)y$$
$$= s^2-sy+\frac{1}{4}y^2+2sy-y^2$$
$$= s^2+s\times\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{3}{4}(\frac{2}{\sqrt{3}}t)^2$$
$$= s^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}st-t^2 = (*)$$

$s=\cos\theta$, $t=\sin\theta$ とおく.

$$(*) = \cos^2\theta-\sin^2\theta+\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta\sin\theta = \cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\theta$$
$$= \sqrt{1+\frac{1}{3}}\sin(2\theta+\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(2\theta+\alpha)$$

最大値は $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 最小値は $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $z_1=\omega$ として. $z_k=\omega^k$, $\omega^n=1$, $z_0=\omega^0=1$.

$$S_n = \frac{1-\omega^{n-1}}{1+\omega^{n-1}}+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\omega^m-\omega^{m-1}}{\omega^m+\omega^{m-1}}$$
$$= \frac{\omega-1}{\omega+1}+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\omega-1}{\omega+1} = \frac{\omega-1}{\omega+1}+(n-1)\frac{\omega-1}{\omega+1} = \frac{\omega-1}{\omega+1}\times n$$
$$= n\frac{\omega-1}{\omega+1}\times\frac{\bar{\omega}+1}{\bar{\omega}+1} = n\frac{\omega-\bar{\omega}}{2+\omega+\bar{\omega}}$$

$n=6$ のとき $\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ だから $S_n=\cancel{6}^{2}\times\frac{\sqrt{3}i}{\cancel{2+1}} = \underline{2\sqrt{3}i}$

一般に $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ のとき

$$S_n = n\times\frac{2i\sin\frac{2\pi}{n}}{2+2\cos\frac{2\pi}{n}} = \frac{1}{1+\cos\frac{2\pi}{n}}\times\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\times 2\pi i \to \underline{\pi i}$$

(3) $(1+5^{3^1}+25^{3^1})(1+5^{3^2}+25^{3^2})\cdots(1+5^{3^{99}}+25^{3^{99}})\cdot\frac{1}{1-5^{3^{100}}}$

$$= (1+5^{3^1}+25^{3^1})\cdots(1+\cancel{5^{3^{99}}+25^{3^{99}}})\times\frac{1}{(1-5^{3^{99}})(1+\cancel{5^{3^{99}}+25^{3^{99}}})}$$
$$= \cdots = \frac{1}{1-5^{3^1}} = \underline{-\frac{1}{124}}$$

③ Aについて

| | | |
|---|---|---|
| サイコロが1 | | 1点 $\frac{1}{2}$, 2点 $\frac{1}{2}$ |
| 〃 | 2 | 2点 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ 3点 $\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times {}_2C_1=\frac{1}{2}$, 4点 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ |
| 〃 | 3 | 3点 $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$, 4点 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)\times {}_3C_1=\frac{3}{8}$ |
| | | 5点 $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\times {}_3C_1=\frac{3}{8}$ 6点 $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ |
| 〃 | 4 | 4点 $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ 5点 $\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\times {}_4C_1=\frac{1}{4}$ |
| | | 6点 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times {}_4C_2=\frac{3}{8}$, 7点 $\frac{1}{4}$, 8点 $\frac{1}{16}$ |

まとめると

| 1てん | 2てん | 3てん | 4てん | 5てん | 6てん | 7てん | 8てん |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{11}{64}$ | $\frac{7}{32}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{64}$ |

Bについて

| | | コイン | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 |
| サイコロ | 1 | 1 | 2 |
| | 2 | 2 | 4 |
| | 3 | 3 | 6 |
| | 4 | 4 | 8 |

| 1てん | 2てん | 3てん | 4てん | 6てん | 8てん |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

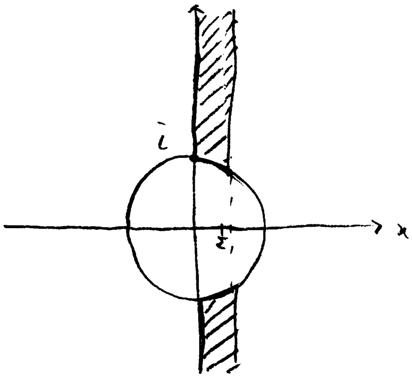
まとめる確率は

$$\underset{\boxed{1}}{\frac{1}{8}\times 0}+\underset{\boxed{2}}{\frac{3}{16}\times\frac{1}{8}}+\underset{\boxed{3}}{\frac{5}{32}\times\frac{3}{8}}+\underset{\boxed{4}}{\frac{11}{64}\times\frac{4}{8}}+\underset{\boxed{5}}{\frac{7}{32}\times\frac{6}{8}}+\underset{\boxed{6}}{\frac{1}{8}\times\frac{6}{8}}+\underset{\boxed{7}}{\frac{1}{16}\times\frac{7}{8}}+\underset{\boxed{8}}{\frac{1}{64}\times\frac{7}{8}}$$

$$=\frac{1}{64\times 8}(12+30+44+60+48+28+7)=\frac{229}{64\times 8}=\underline{\frac{229}{512}}$$

④ $z=x+yi$ とおく.

$0 \leqq 2x \leqq 1 \leqq \sqrt{x^2+y^2} \iff 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2},\ x^2+y^2 \geqq 1 \quad \cdots ①$




左図.（境界含む）

$-z^{-1} = -\dfrac{1}{x+yi} = X+Yi$ とおく. $(X=Y=0$ は除く$)$

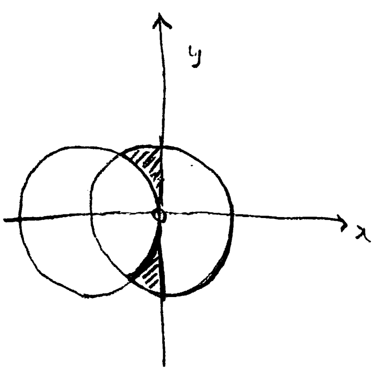
$x+yi = -\dfrac{1}{X+Yi} = -\dfrac{X-Yi}{X^2+Y^2} = -\dfrac{X}{X^2+Y^2} + \dfrac{Y}{X^2+Y^2}i$

これらを①に代入

$0 \leqq -\dfrac{X}{X^2+Y^2} \leqq \dfrac{1}{2} \iff 0 \leqq -X \leqq \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2$

$\iff X \leqq 0,\quad (X+1)^2+Y^2 \geqq 1$

$\left(\dfrac{-X}{X^2+Y^2}\right)^2 + \left(\dfrac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2 \geqq 1 \iff X^2+Y^2 \leqq 1.$




左図 境界含む（原点は除く）

⑤ $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}x$

(1) 長さを $l_A$ とすると

$$l_A = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}x\right)^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{1}{2x}+\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2x}+\frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\sqrt{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \underline{\frac{1}{4}\log 3 + \frac{1}{2}}$$

(2) $f(x_0) = \frac{1}{2x_0} - \frac{1}{2}x_0 = \frac{1-x_0^2}{2x_0}$

よって $\vec{AB}$ と平行なベクトルとして $(x_0^2-1,\ 2x_0)$ が考えられる

このベクトルの大きさは $\sqrt{(x_0^2-1)^2+(2x_0)^2} = \sqrt{x_0^4+2x_0^2+1} = x_0^2+1$

よって $\vec{AB} = \left(\frac{x_0^2-1}{x_0^2+1},\ \frac{2x_0}{x_0^2+1}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \vec{OA} + \vec{AB} = \left(x_0,\ \frac{1}{2}\log x_0 - \frac{1}{4}x_0^2\right) + \left(\frac{x_0^2-1}{x_0^2+1},\ \frac{2x_0}{x_0^2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{x_0^3+x_0^2+x_0-1}{x_0^2+1},\ \frac{1}{2}\log x_0 - \frac{1}{4}x_0^2 + \frac{2x_0}{x_0^2+1}\right)$$

(3) $$\frac{dx_1}{dx_0} = 1 + \frac{\cancel{2x_0^3}+2x_0-\cancel{2x_0^3}+2x_0}{(x_0^2+1)^2} = 1 + \frac{4x_0}{(x_0^2+1)^2}$$

$$\frac{dy_1}{dx_0} = \frac{1}{2x_0} - \frac{x_0}{2} + \frac{2x_0^2+2-4x_0^2}{(x_0^2+1)^2}$$

$$\left(\frac{dx_1}{dx_0}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dx_0}\right)^2 = 1 + \frac{8x_0}{(x_0^2+1)^2} + \frac{16x_0^2}{(x_0^2+1)^2} + \frac{1}{4x_0^2} + \frac{x_0^2}{4} + \frac{(2-2x_0^2)^2}{(x_0^2+1)^2}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2-2x_0^2}{x_0(x_0^2+1)^2} + \frac{x_0(2-2x_0^2)}{(x_0^2+1)^2}$$

$$= \frac{\{(x_0^2+1)^2+4x_0\}^2}{4x_0^2(x_0^2+1)^2}$$

$$l_B = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_0}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dx_0}\right)^2}\,dx_0 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x_0^2+1)^2+4x_0}{2x_0(x_0^2+1)}\,dx_0 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x_0^2+1}{2x_0} + \frac{2}{x_0^2+1}\,dx_0$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x_0^2}{2}+\log x_0\right]_1^{\sqrt{3}} + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \times \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}(2+\log 3) + \frac{\pi}{6}$$

⑥ $\log_a b$ は有理数だから、互いに素な整数 $p, q$ を用いて

$$\log_a b = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は互いに素 } p \geqq 1 \text{ とする})$$

と表せる。上式より

$$b = a^{\frac{q}{p}}$$

両辺をp乗して

$$b^p = a^q$$

$q<0$ とすると右辺は分数となってしまうので $q \geqq 0$。このとき、$a, b$ は共通の素因数をもつ

よって　$a = c^k, b = c^l$ と表すことができる。このとき

$$c^{lp} = c^{kq}$$

となるので

$$lp = kq$$

$p, q$ は互いに素なので　$l = q\alpha, k = p\alpha$　($\alpha$ は自然数)

と表すことができるので

$$a = c^{p\alpha}, b = c^{q\alpha}$$

と表すことができ、$p\alpha = m$、$q\alpha = n$ とすることで、題意は成りたつ。