①(1) $f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ とおく

$f'(x) = \frac{x^2}{x+1} > 0$. $f(0) = 0$ より. $f(x) > f(0) = 0$

よって. $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$ が成り立つ.

$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \log(1+x)$ とおく

$g'(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{2+x-\sqrt{1+x}}{(1+x)\sqrt{1+x}}$

$h(x) = 2 + x - \sqrt{1+x}$ とおく.

$h'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{2\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}} > 0$ $(\because \sqrt{1+x} > 1)$

$h(0) = 2+0-1 = 1$ だから $g'(x)$ は $x > 0$ で $g'(x) > 0$ を満たす.

$g(0) = 0 - 0 = 0$ より $g(x) > g(0) = 0$

よって $\log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ が成り立つ　　　　証明終

(2) $\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} = p(x)$ とおく

$p'(x) = \frac{-1}{\{\log(1+x)\}^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(\log(1+x))^2}\left\{\log(1+x) + \frac{x}{\sqrt{1+x}}\right\}\left\{\log(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}\right\}$

ここで $\log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ より $p'(x) < 0$

したがって $p(x)$ は単調に減少する $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0 - 0 = 0$.

$x < 2$ のとき
(1) より $\frac{2}{2x-x^2} > \frac{1}{\log(1+x)} > \frac{\sqrt{1+x}}{x}$

$\frac{2}{2x-x^2} - \frac{1}{x} > \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} > \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{1}{x}$

$\frac{x}{x(2-x)} > \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} > \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$\frac{1}{2-x} > \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} > \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

ここで $\lim_{x\to+0} \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+0} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}$ だから

はさみうちの原理より

$\lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{2}$　　よって $x > 0$ のとき

$0 < p(x) < \frac{1}{2}$

$\underline{0 < y < \frac{1}{2}}$

② (1) $f(x)$ が $x-c$ で割りきれるとき因数定理より $f(c)=0$ だから.

$$c^4-ac^3+bc^2-ac+1=0$$

$c=0$ を代入しても成立しないので $c\neq 0$. そこで両辺を c^2 で割って整理すると,

$$b=-c^2-\frac{1}{c^2}+ac+\frac{a}{c}$$

$a>0$ だから, 上式で $c<0$ とすると, 右辺は必ず負となり $b>0$ に矛盾する.

よって $c>0$. 証明終

$c\neq 1$ のとき $f\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{c^4}-\frac{a}{c^3}+\frac{b}{c^2}-\frac{a}{c}+1=\frac{1}{c^4}(1-ac+bc^2-ac^3+c^4)=\frac{1}{c^4}f(c)=0$

よって $f(x)$ は $x-\frac{1}{c}$ を因数にもつので $(x-c)\left(x-\frac{1}{c}\right)$ で割りきれる.

$c=1$ のとき.

$$f(1)=1-a+b-a+1=2-2a+b=0.$$

$$f'(x)=4x^3-3ax^2+2bx-a$$

$$f'(1)=4-3a+2b-a=4-4a+2b=2(2-2a+b)=0$$

よって. $f(x)$ は $(x-1)^2$ で割りきれる

以上より. $f(x)$ は $(x-c)\left(x-\frac{1}{c}\right)$ で割りきれる. 証明終

(2) (1) より $f(x)$ が $x-s$ で割りきれるとき $x-\frac{1}{s}$ でも割りきれる

したがって $f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$ と因数分解できるとき.

$$f(x)=(x-s)\left(x-\frac{1}{s}\right)(x-t)\left(x-\frac{1}{t}\right)$$ と表すことができる.

$f(x)=0$ について 解と係数の関係より

$$s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}=a$$

(1) より. s, t は正だから. 相加相乗平均の公式より.

$$a=s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{1}{s}}+2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=4$$ 証明終

(3) (1) より $f(x)=0$ の実数解は全て正の実数なので

$$f(x)=0 \iff \frac{f(x)}{x^2}=0 \iff x^2-ax+b-\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\iff \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$ とおく.

xが正の実数だから. $X = x + \frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$.

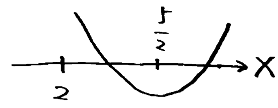
よって $f(x) = 0$ が $f(x) = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$ と因数分解できることは

$X^2 - aX + b - 2 = 0$ が $X \geqq 2$ の範囲でのみ実数解をもつことと同値

$a=5$のとき

$g(X) = X^2 - 5X + b - 2 = \left(X - \frac{5}{2}\right)^2 + b - \frac{33}{4}$

$g(X) = 0$ が $X \geqq 2$ でのみ解をもつための条件は



右グラフより. $b - \frac{33}{4} \leqq 0$ かつ $g(2) \geqq 0$

整理して. $b \leqq \frac{33}{4}$ $\quad g(2) = 4 - 10 + b - 2 \geqq 0 \iff b \geqq 8$

$8 \leqq b \leqq \frac{33}{4}$

これを満たす自然数は8のみ. $\therefore \underline{b = 8}$.

③ (1) $f(t) = 2\cos t - 4\sin t\cos t = 2\cos t(1-2\sin t)$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
f'		$+$	0	$-$	0
f	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ で $f'(t) = 0$ となるのは $t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$

$f(t)$ の増減は右のようになる

よって $f(t)$ は $t = \frac{\pi}{6}$ のとき最大　$f(\frac{\pi}{6}) = 1 + \frac{1}{2} = \underline{\frac{3}{2}}$

$g'(t) = -2\sin t + 2\cos 2t = 2(1-2\sin^2 t) - 2\sin t = -2(\sin t + 1)(2\sin t - 1)$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
g'		$+$	0	$-$	
g	2	↗		↘	0

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ で $g'(t) = 0$ となるのは. $t = \frac{\pi}{6}$,

$g(t)$ の増減は右のようになる

よって $g(t)$ は $t = \frac{\pi}{6}$ のとき最大で $g(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{3}{2}\sqrt{3}}$

(2) $f(t_1) = f(t_2)$ より

$$2\sin t_1 + \cos 2t_1 = 2\sin t_2 + \cos 2t_2$$

$$2\sin t_1 + \cancel{1} - 2\sin^2 t_1 = 2\sin t_2 + \cancel{1} - 2\sin^2 t_2$$

$$\sin t_1 - \sin t_2 - \sin^2 t_1 + \sin^2 t_2 = 0$$

$$(\sin t_1 - \sin t_2)(1 - \sin t_1 - \sin t_2) = 0$$

$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \frac{\pi}{2}$ だから　$\sin t_1 \neq \sin t_2$.　$\therefore \sin t_1 + \sin t_2 = 1$.

$$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 = (2\cos t_1 + \sin 2t_1)^2 - (2\cos t_2 + \sin 2t_2)^2$$

$$= 4\cos^2 t_1 + 4\cos t_1 \sin 2t_1 + \sin^2 2t_1 - 4\cos^2 t_2 - 4\cos t_2 \sin 2t_2 - \sin^2 2t_2 = (*)$$

$\sin t_1 = a$, $\sin t_2 = b$ と表す $(a+b=1)$

$$(*) = \cancel{4} - 4a^2 + 8(1-a^2)a + 2(1-a^2)a^2 - \cancel{4} + 4b^2 - 8(1-b^2)b + 2(1-b^2)b^2$$

$$= 2(b^2-a^2) + 8(a-b) - 8(a^3-b^3) - 2(a^4-b^4)$$

$$= (b-a)\left(2 - 8 + 8(a^2+ab+b^2) + 2(a^2+b^2)\right)$$

$$= (b-a)\left(-6 + 10(a+b)^2 - 20ab + 8ab\right)$$

$$= (b-a)(4-12ab) = (1-2a)(4-12a(1-a))$$

$$= (1-2a)(4-12a+12a^2) = 12(1-2a)\left\{(a-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{12}\right\} = (**)$$

$0 \leqq t < \frac{\pi}{6}$ より.　$0 \leqq a < \frac{1}{2}$.　よって $(**) > 0$　が成り立つ

(3) $S = \int_1^{\frac{3}{2}} y_+ - y_- \, dx$

$= \int_1^{\frac{3}{2}} 2\cos t + \sin 2t \, dx - \int_1^{\frac{3}{2}} 2\cos t + \sin 2t \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos t + \sin 2t) \times 2\cos t (1 - 2\sin t) \, dt$

$\qquad - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (2\cos t + \sin 2t) \times 2\cos t (1 - 2\sin t) \, dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(\cos t + \cos t \sin t)\cos t (1 - 2\sin t) \, dt$

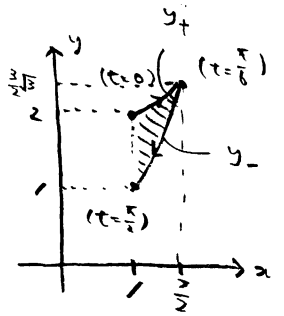
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\left(\cos^2 t - 2\cos^2 t \sin t + \cos^2 t \sin t - 2\cos^2 t \sin^2 t\right) dt.$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) - 4\cos^2 t \sin t - 2(1 + \cos 2t)(1 - \cos 2t) \, dt$

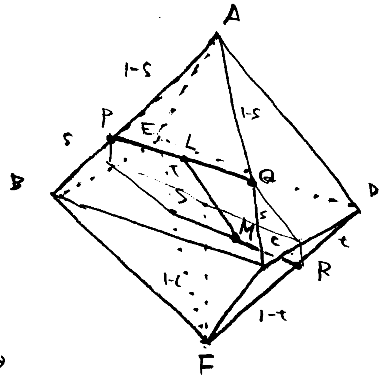
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cancel{2} + 2\cos 2t + 4\cos^2 t (\cos t)' - \cancel{2} + 1 + \cos 4t \, dt$

$= \left[t + \sin 2t + \frac{4}{3}\cos^3 t + \frac{1}{4}\sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$



④　$\vec{AB}=\vec{b}$，$\vec{AC}=\vec{c}$，$\vec{AD}=\vec{d}$ とする



(1)　$\vec{ED}=\vec{BC}$ より　$\vec{AE}=\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}$

FはBDの中点 $\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$ を2倍した点だから

$$\vec{AF}=\vec{b}+\vec{d}$$

$\vec{AP}=(1-s)\vec{b}$，$\vec{AQ}=(1-s)\vec{c}$．

$\vec{AR}=\vec{d}+t\vec{DF}=\vec{d}+t(\vec{b}+\vec{d}-\vec{d})=\vec{d}+t\vec{b}$

$\vec{AS}=\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}+t\vec{c}$

$\vec{PQ}=(1-s)(\vec{c}-\vec{b})$，$\vec{RS}=\cancel{\vec{d}}+\vec{b}-\vec{c}+t\vec{c}-\cancel{\vec{d}}-t\vec{b}=(1-t)(\vec{b}-\vec{c})$

∴ $\vec{RS}=\dfrac{1-t}{1-s}\vec{PQ}$　であり PQRSは平行四辺形をなし したがって同一平面上に存在する

(2)　$\vec{AL}=\dfrac{1-s}{2}(\vec{b}+\vec{c})$，$\vec{AM}=\vec{d}+\dfrac{\vec{b}-\vec{c}}{2}+\dfrac{1}{2}t(\vec{b}+\vec{c})$

$\vec{LM}=\vec{d}+\cancel{\frac{1}{2}\vec{b}}-\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}t\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}-\cancel{\frac{1}{2}\vec{b}}-\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}s\vec{b}+\frac{1}{2}s\vec{c}$

$=\vec{d}-\vec{c}+\frac{1}{2}(s+t)(\vec{b}+\vec{c})$

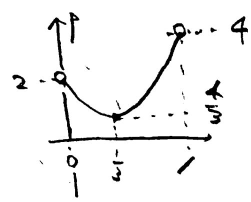
$\vec{b}=\vec{AB}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{c}=\vec{AC}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{d}=\vec{AD}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ を代入

$\vec{LM}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(s+t)\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}(s+t)=p$ とすると　$\vec{LM}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$|\vec{LM}|^2=(p-1)^2+(p-1)^2+(-2p)^2=6p^2-4p+2=6\left(p-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$

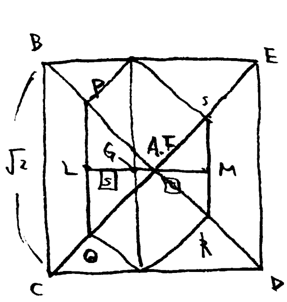
$0<s<1$，$0<t<1$ より　$0<p<1$ だから



$\frac{4}{3}\leqq|\vec{LM}|^2<4$

$\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqq|\vec{LM}|<2$　　最小値 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3)　LMが最小となるとき，$p=\frac{1}{3}=\frac{1}{2}(s+t)$　　∴ $s+t=\frac{2}{3}$



LMとxy平面の交点をGとしたとき $LG:GM=s:t$

$X=\{(1-s)\sqrt{2}+\sqrt{2}\}\times\frac{1}{2}\times\frac{s}{s+t}m$

$\quad+\{(1-t)\sqrt{2}+\sqrt{2}\}\times\frac{1}{2}\times\frac{t}{s+t}m$

$=(2\sqrt{2}-\sqrt{2}s)\times\frac{\sqrt{3}}{2}s+(2\sqrt{2}-\sqrt{2}t)\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$=-\frac{\sqrt{6}}{2}(s^2+t^2)+\sqrt{6}(s+t)=-\frac{\sqrt{6}}{2}\left((s+t)^2-2st\right)+\frac{2}{3}\sqrt{6}=\frac{4}{9}\sqrt{6}+\sqrt{6}st$

$s+t \geqq 2\sqrt{st}$ より $\sqrt{st} \leqq \frac{1}{3}$ $\therefore\ st \leqq \frac{1}{9}$

よって $X = \frac{4}{9}\sqrt{6} + \sqrt{6}st \leqq \frac{4}{9}\sqrt{6} + \frac{1}{9}\sqrt{6} = \frac{5}{9}\sqrt{6}$.

等号は $s=t$ のときなので $s=t=\frac{1}{3}$ で、このとき X は最大値 $\frac{5}{9}\sqrt{6}$ をとる

⑤ (1) $n+1$ 試合目について

(i) n 試合目にAが勝って $n+1$ 試合目にも勝つ

$a_n \times p$.

(ii) n 試合目にAが負けて. $n+1$ 試合目にAが勝つ.

$(1-a_n)q$

$\therefore\ a_{n+1} = pa_n + (1-a_n)q = (p-q)a_n + q$

$a_{n+1} - \dfrac{q}{1-p+q} = (p-q)\left(a_n - \dfrac{q}{1-p+q}\right)$

よって $\left\{a_n - \dfrac{q}{1-p+q}\right\}$ は. 初項 $\left(a_1 - \dfrac{q}{1-p+q}\right)$. 公比 $p-q$ の等比数列

$a_n - \dfrac{q}{1-p+q} = \left(p - \dfrac{q}{1-p+q}\right)(p-q)^{n-1}$

$a_n = \dfrac{(p-q)^n(1-p)}{1-p+q} + \dfrac{q}{1-p+q}$

(2)

$1 \leqq k < l < n$ として. k 回目と l 回目にBが勝つ確率は

① ($k-1$) (k) ($l-1$) (l) (n)

$p \times p \times \cdots \times p \times (1-p) \times q \times p \times \cdots \times p \times (1-p) \times q \times p \times \cdots \times p$

$= p^{n-4} q^2 (1-p)^2$

k, l のとり方は　$n-2$ 個

${}_{n-2}C_2$

$1 \leqq k < l = n$ のとき.

① ($k-1$) (k) ($n-1$) (n)

$p \times p \times \cdots \times p \times (1-p) \times q \times p \times \cdots \times p \times (1-p) = p^{n-3} q (1-p)^2$

$n-2$ 個　$l=n$

${}_{n-2}C_1$

求める確率を P として

$P = {}_{n-2}C_2 \times p^{n-4} q^2 (1-p)^2 + {}_{n-2}C_1\, p^{n-3} q (1-p)^2$

$= (n-2)p^{n-4} q (1-p)^2 \left\{\frac{1}{2}(n-3)q + p\right\}$