①

(1) 右辺 − 左辺 $= a^r + x^r - (a+x)^r = f(x)$ とおく.

$f(x) = rx^{r-1} - r(a+x)^{r-1} = r\{x^{r-1} - (a+x)^{r-1}\}$

ここで x^{r-1} は $(x^{r-1})' = (r-1)x^{r-2}$ となるので $x \geqq 0$ において

減少関数であり, $a \geqq 0$ なので, $x \leqq a+x$ が成り立つので,

$$x^{r-1} - r(a+x)^{r-1} \geqq 0.$$

よって $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq 0$.

また $f(0) = a^r - 0^r - a^r = 0$ なので

$$f(x) \geqq f(0) = 0.$$

すなわち, $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq 0$ であり, これにより,

$$(a+x)^r \leqq a^r + x^r$$

が成り立つことが示された.

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$ と表す.

以下 不等式を数学的帰納法によって示す.

(i) $n=1$ のとき.

不等式の両辺とも S_1 となるので成り立つことは明らか.

(ii) $n=N$ のとき,

$(S_N)^r \leqq \sum_{k=1}^{N} a_k{}^r$ が成り立つと仮定する.

このとき,

$$\begin{aligned}(S_{N+1})^r &= (S_N + a_{N+1})^r \\ &\leqq S_N{}^r + a_{N+1}{}^r \quad (\because (1)) \\ &\leqq \sum_{k=1}^{N} a_k{}^r + a_{N+1}{}^r \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} a_k{}^r\end{aligned}$$

となるので $n=N+1$ のときも不等式は成り立つ．

(i)(ii)より，数学的帰納法により不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^r \leqq \sum_{k=1}^{n} {a_k}^r$$

が成り立つことが示された．

証明終．

②

(1) $n \geqq 1$のとき

$$C_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x \cos x\,dx$$

$$= \Big[\sin x \cos^{n+1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times (n+1)\cos^n x\,(-\sin x)\,dx$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^n x\,dx$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\,dx$$

$$= (n+1)C_n - (n+1)C_{n+2}$$

$$(n+2)C_{n+2} = (n+1)C_n$$

$$\therefore \quad C_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}C_n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots ①$$

$n=0$のとき、

$$C_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos x\,dx$$

$$= \Big[\sin x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,(-\sin x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - C_2 = C_0 - C_2$$

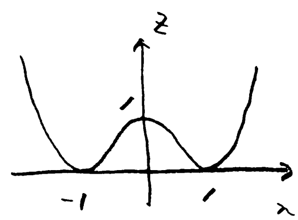
$\therefore \quad C_2 = \frac{1}{2}C_0$ となるので①は$n=0$でも成り立つ。

以上より

$$C_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}C_n \quad (n \geqq 0)$$ が示された。

(2) $z+2x^2-x^4 \leqq 1 \iff z \leqq (x^2-1)^2$ となるが、

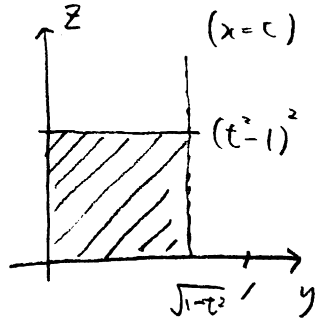
$z=(x^2-1)^2$のグラフは右のようになる



$x^2+y^2 \leqq 1$より xの範囲が $-1 \leqq x \leqq 1$で

あることと、$x \geqq 0$の条件から、$0 \leqq x \leqq 1$であり、このとき

グラフから $0 \leqq z \leqq 1$.



$x=t$ のとき $(0 \leqq t \leqq 1)$ 不等式の領域と

$x=t$ との交わりは右図のようになる．

この長方形の面積を $S(t)$ とすると．

$$S(t) = (t^2-1)^2\sqrt{1-t^2} = (1-t^2)^{\frac{5}{2}}$$

よって、もとめる体積を V とすると．

$$V = \int_0^1 S(t)\,dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{5}{2}}\,dt.$$

ここで．$t=\sin\theta$ とおくと．$\dfrac{dt}{d\theta} = \cos\theta$．

t	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^{\frac{5}{2}}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\,d\theta = C_6$$

$$= \frac{5}{6}C_4 = \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}C_2 = \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times C_0$$

$$= \frac{5}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\theta = \underline{\frac{5}{32}\pi}$$ //

③

(1) $x^r+y^r=1$ の両辺を x で微分する

$$rx^{r-1}+ry^{r-1}\frac{dy}{dx}=0$$

$0<r<1$ より $r\neq 0$ であるので $y\neq 0$ のとき.

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{x}{y}\right)^{r-1}$$

が成り立っている. よって $P(p,q)$ における接線は.

$$y=-\left(\frac{p}{q}\right)^{r-1}(x-p)+q$$

$$q^{r-1}y=-p^{r-1}x+p^r+q^r$$

ここで P は C 上の点なので $p^r+q^r=1$.

よって l は.

$$p^{r-1}x+q^{r-1}y=1$$

$x=0$ のとき $y=q^{1-r}$. $y=0$ のとき $x=p^{1-r}$ となるので.

$$\underline{A(p^{1-r},0),\ B(0,q^{1-r})}_{//}$$

(2) $AB^2=(p^{1-r})^2+(q^{1-r})^2$

$$=p^{2-2r}+q^{2-2r}$$

$p^r+q^r=1$ と比較して. $2-2r=r$ すなわち. $r=\frac{2}{3}$ とすると.

$AB^2=1$ となり. 題意を満たす.

$$\therefore \underline{r=\frac{2}{3}}_{//}$$

④

(1) 袋目を選んだときに赤球をm回とり出す確率は

$$\frac{1}{n}\,{}_{10}C_m\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(\frac{n-k}{n}\right)^{10-m}$$

よって

$$\underline{P_{m,n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}_{10}C_m\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(\frac{n-k}{n}\right)^{10-m}}\,//$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}P_{10,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{10}=\int_0^1 x^{10}\,dx=\underline{\frac{1}{11}}\,//$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}P_{m,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{}_{10}C_m\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)^{10-m}$$

$$=\int_0^1 {}_{10}C_m\,x^m(1-x)^{10-m}\,dx\quad\cdots ①$$

$$\lim_{n\to\infty}P_{m+1,n}=\int_0^1 {}_{10}C_{m+1}\,x^{m+1}(1-x)^{9-m}\,dx\quad\cdots ②$$

$$① =\int_0^1 {}_{10}C_m\cdot x^m(1-x)^{10-m}\,dx$$

$$={}_{10}C_m\left\{\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^{10-m}\right]_0^1+\int_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}(10-m)(1-x)^{9-m}\,dx\right.$$

$$=\frac{10!}{m!(10-m)!}\times\frac{10-m}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{9-m}\,dx$$

$$=\frac{10!}{(m+1)!(9-m)!}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{9-m}\,dx$$

$$={}_{10}C_{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{9-m}\,dx$$

$$=\int_0^1 {}_{10}C_{m+1}\,x^{m+1}(1-x)^{9-m}\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}P_{m+1,n}\qquad(\because ②)$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_{m,n}=\lim_{n\to\infty}P_{m+1,n}$ が成立する.

証明終