①

(1) 真数条件より　$x>0$

底を2に揃えると　$2^x \log_2 x - 8 \times \cancel{\log_2 a}\dfrac{\log_2 x}{\cancel{\log_2 a}} = 0$

$$\log_2 x\,(2^x - 8) = 0$$

$\log_2 x = 0$　または　$2^x = 8$　となるので　$x = 1, 3$ //

(2)

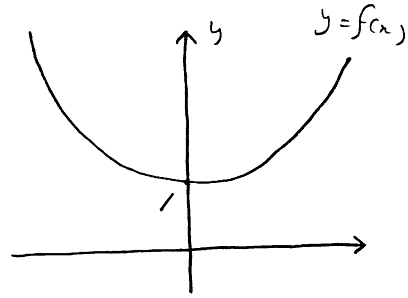
$$2^x \log_2 A + 2^{-x} \cancel{\log_2 a} \times \frac{\log_2 A}{\cancel{\log_2 a}} - 2 = 0$$

$$\log_2 A\,(2^x + 2^{-x}) = 2$$

$$\log_2 A = \frac{2}{2^x + 2^{-x}}$$

$A=1$のとき解は存在しないので　$A \neq 1$のときを考える

$$\frac{1}{\log_2 A} = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$$



右辺 $= f(x)$ とすると　$y = f(x)$のグラフは

右のようになる（∵ $f(x)$は偶関数で　$x>0$において単調増加）

$y = f(x)$ と $y = \dfrac{1}{\log_2 A}$ のグラフの交点の数が方程式の解の数と

一致するので

(i) $\dfrac{1}{\log_2 A} > 1$のとき　解は2つ

$\log_2 A < 0$のときは成立しないので $\log_2 A > 0$　$(A>1)$

このとき　$\log_2 A < 1$　となるので　$1 < A < 2$

(ii) $\dfrac{1}{\log_2 A} = 1$のとき　$(A=2$のとき$)$　解は1つ

(iii) $\dfrac{1}{\log_2 A} < 1$のとき

$\log_2 A < 0$ のときは成りたつ　$(A<1)$

$\log_2 A > 0$ のとき　$\log_2 A > 1$ となるので　$A > 2$

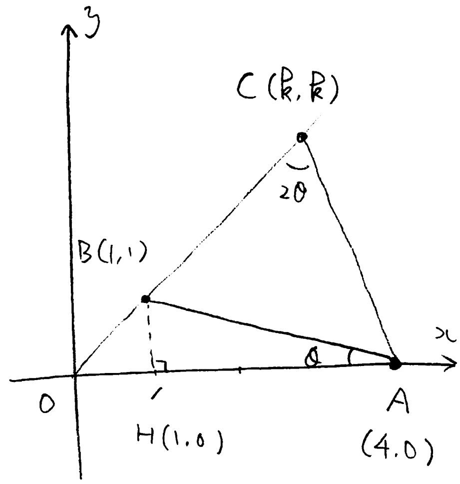
以上をまとめて、

$$\begin{cases} 1 < A < 2 \text{ のとき} & \text{2つの実数解をもつ.} \\ A = 2 \text{ のとき} & \text{1つ 〃} \\ 0 < A \leqq 1 \text{ または } A > 2 \text{ のとき} & \text{解を持たない} \end{cases}$$

②

Bからx軸に下ろした垂線の足をH

とする H(1,0)



(1) △ABHに注目して

$$\cos\theta = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\theta = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{9}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

(2) $\vec{CO}\cdot\vec{CA} = |\vec{CO}||\vec{CA}|\cos 2\theta$ に値を代入.

$$(-k, -k)\cdot(4-k, -k) = \sqrt{2}k\sqrt{(4-k)^2+(-k)^2} \times \frac{4}{5}$$

$$-4k + k^2 + k^2 = \frac{4}{5}\sqrt{2}k\sqrt{2k^2-8k+16}$$

$$5k^2 - 10k = 4k\sqrt{k^2-4k+8}$$

両辺2乗して

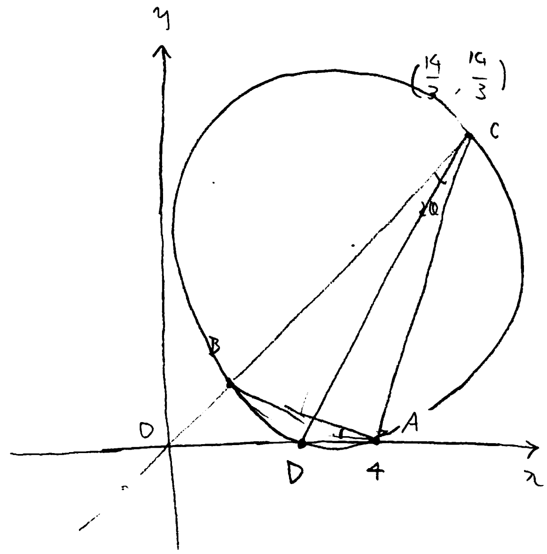
$$25k^2(k-2)^2 = 16k^2(k^2-4k+8)$$

$k>0$ だから 整理すると

$$9k^2 - 36k - 28 = 0$$

$$(3k-14)(3k+2) = 0$$

$$k = \frac{14}{3}, \quad (\because k>0)$$



(3) 円周角の定理より $\angle BAD = \angle BCD = \theta$

$\angle DCA = \angle BCA - \angle BCD = 2\theta - \theta = \theta$. $\therefore \cos\angle DCA = \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

よってCDは∠OCAの二等分線なので $OD : DA = OC : AC = \frac{14}{3}\sqrt{2} : \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{14}{3})^2}$

$= 7 : 5$

ODとDAを底辺と考えると△OCDと△ACDの高さが

等しいので △OCD : △ACD = OD : DA = 7 : 5

③

(1) $a_2 = \frac{2}{2}a_1 + \frac{2^2}{2} = 2 + 2 = 4$

$a_3 = \frac{4}{3} \times a_2 + \frac{2^3}{3} = \frac{4}{3} \times 4 + \frac{8}{3} = \frac{24}{3} = 8$

$a_4 = \frac{6}{4} \times a_3 + \frac{2^4}{4} = \frac{3}{2} \times 8 + \frac{16}{4} = 12 + 4 = 16$

$\underline{a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = 16}$ //

(2). (1)の結果から $a_n = 2^n$ と推測される（これを命題Pと呼ぶことにする）

(i) $n = 1$のとき

$a_1 = 2^1 = 2$ となるので命題Pは$n = 1$のとき成立している

(ii) $n = k$のとき

$a_k = 2^k$が成り立つと仮定する.

このとき漸化式より

$$a_{k+1} = \frac{2k}{k+1} \cdot 2^k + \frac{2^{k+1}}{k+1}$$

$$= \frac{1}{k+1}\left(k \cdot 2^{k+1} + 2^{k+1}\right)$$

$$= 2^{k+1}$$

となるので. $n = k$においてPが成り立つならば $n = k+1$においても Pが成り立つことが示される.

(i)(ii)より、数学的帰納法によって命題Pが成り立つことが示された.

よって $a_n = 2^n$ である.

(3) $p = 3 \times 2^k$ が成り立つとき

$$p^2 = (3 \times 2^k)^2 = 9 \times 2^{2k} = (8+1) \times 2^{2k} = 8 \cdot 2^{2k} + 2^{2k} = 2^{2k+3} + 2^{2k}.$$

よって $n = 2k+3$, $m = 2k$とすることで(イ)が成り立つ.

(4)

$$a_m + a_n = 2^m + 2^n = 2^m(1+2^{n-m}) = p^2$$

ここで、$1+2^{n-m}$ は奇数だから上式の左辺は 2 を m コ因数にもつ。

が、右辺 p^2 が 2 を因数にもつ個数は必ず偶数個となるので、

m は偶数でなければならない

$m=2m'$ とすると、上式は、

$$2^{2m'}(1+2^{n-2m'}) = p^2 \quad \cdots (*)$$

次に $1+2^{n-2m'}$ について考える

2^a+1 が平方数になるとき、(a は自然数)

$$2^a+1 = b^2$$

となる自然数 b が存在するが、上式より

$$2^a = (b+1)(b-1)$$

が成り立つ。左辺が偶数だから右辺は連続した2つの偶数の

積なので、$b+1 = 2^{c+1}$, $b-1=2^c$ となる c が存在しなければ

ならない。よって

$$2^a = 2^{c+1} \times 2^c = 2^{2c+1} \quad \text{かつ} \quad 2^{c+1} - 2^c = 2.$$

$$a = 2c+1, \quad 2^c = 2.$$

$$\therefore c=1, \ a=3.$$

つまり 2^a+1 が平方数になるのは $a=3$ のときのみで、

これより $n-2m'=3$.

このとき (*) は

$$2^{2m'}(1+2^3) = (2^{m'} \times 3)^2 = p^2$$

となるので $p = 3 \times 2^{m'}$

よって $k=m'$ とすることで、(3) が成り立つことが示された。

④

(1) $(e^{-|x|}-a\sin x-b\cos x)^2$

$= e^{-2|x|}+a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x-2a\sin x\, e^{-|x|}-2b\cos x\, e^{-|x|}+2ab\sin x\cos x$

ここで　$-2a\sin(-x)e^{-|-x|}=2a\sin x\, e^{-|x|}$ だから $-2a\sin x\, e^{-|x|}$ は奇関数．

$2ab\sin(-x)\cos(-x)=-2ab\sin x\cos x$ だから $2ab\sin x\cos x$ も奇関数．

よって

$$I(a,b)=\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-|x|}-a\sin x-b\cos x)^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-2|x|}+b^2\cos^2 x-2b\cos x\, e^{-|x|}dx+\int_{-\pi}^{\pi}a^2\sin^2 x\,dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-|x|}-b\cos x)^2dx+\frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1-\cos 2x\,dx$$

$$=I(0,b)+\frac{a^2}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=I(0,b)+a^2$$

証明終

(2) $$I(0,b)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-2|x|}+b^2\cos^2 x-2b\cos x(e^{-|x|})dx$$

$$=2\int_0^{\pi}e^{-2|x|}+\frac{b^2}{2}(1+\cos 2x)-2b\cos x(e^{-|x|})dx$$

$$=\int_0^{\pi}2e^{-2x}+b^2+b^2\cos 2x-4be^{-x}\cos x\,dx$$

ここで　$I=\int e^{-x}\cos x\,dx$ とおくと

$I=e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin x\,dx=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx$

$2I=e^{-x}(\sin x-\cos x)$

$$I = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C \qquad (C\text{は積分定数})$$

となるので、

$$I(0,b) = \left[-e^{-2x} + b^2 x + \frac{1}{2}b^2 \sin 2x - 4b \times \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -e^{-2\pi} + \pi b^2 + 0 - 2be^{-\pi}(0+1) - \{-1+0+0-2b\times 1(0-1)\}$$

$$= -e^{-2\pi} + \pi b^2 - 2be^{-\pi} + 1 - 2b$$

$$= \underline{-e^{-2\pi} - 2be^{-\pi} + \pi b^2 - 2b + 1}_{\text{〃}}$$

(3) 左辺−右辺 $= I(a,b) - 1 + e^{-2\pi} + \dfrac{(1+e^{-\pi})^2}{\pi}$

$$= I(0,b) + \pi a^2 - 1 + e^{-2\pi} + \frac{(1+e^{-\pi})^2}{\pi}$$

$$= -\cancel{e^{-2\pi}} - 2be^{-\pi} + \pi b^2 - 2b + \cancel{1} + \pi a^2 - \cancel{1} + \cancel{e^{-2\pi}} + \frac{(1+e^{-\pi})^2}{\pi}$$

$$= \pi b^2 - (2e^{-\pi}+2)b + \pi a^2 + \frac{(1+e^{-\pi})^2}{\pi}$$

$$= \pi\left(b - \frac{e^{-\pi}+1}{\pi}\right)^2 - \frac{(1+e^{-\pi})^2}{\pi} + \pi a^2 + \frac{(1+e^{-\pi})^2}{\pi}$$

$$= \pi\left(b - \frac{e^{-\pi}+1}{\pi}\right)^2 + \pi a^2 \geqq 0.$$

等号は $a=0$, $b = \dfrac{e^{-\pi}+1}{\pi}$ のとき成り立つ。