問題 1

自然数 p，n に対し，座標平面において，曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^p$ と 2 直線 $y=0$，$x=2n$ で囲まれた部分（境界も含む）に含まれている格子点の個数を $L_p(n)$ とする．ここで，格子点とは x 座標，y 座標がともに整数の点である．次の問いに答えよ．

（1） $L_p(n)=1+\dfrac{3}{2}n+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}k^p$ であることを示せ．(30)

（2） 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_p(n)}{n^{p+1}}$ を求めよ．(20)

① (1) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int 1+\cos 2x\ dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ （Cは積分定数）

(2) $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$ （ 〃 ）

(3) $I(a,b) = \int_0^{\pi} (x - a - b\cos x)^2\,dx$

$$= \int_0^{\pi} x^2 + a^2 + b^2\cos^2 x - 2ax - 2bx\cos x + 2ab\cos x\ dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}b^2 x + \frac{1}{4}b^2\sin 2x - ax^2 + a^2 x - 2bx\sin x - 2b\cos x + 2ab\sin x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{3}\pi^3 + a^2\pi + \frac{1}{2}b^2\pi - a\pi^2 - 2b(-1-1) = \underline{\pi a^2 + \frac{\pi}{2}b^2 - \pi^2 a + 4b + \frac{\pi^3}{3}}$$ //

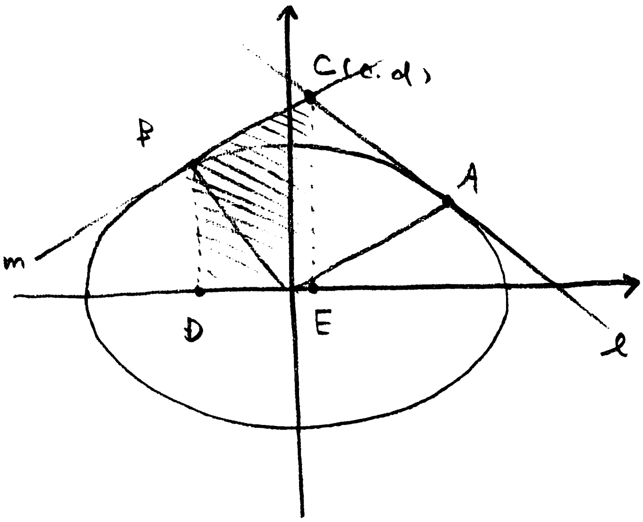
(4) $I(a,b)$

$$= \pi\left(a - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(b + \frac{4}{\pi}\right)^2 - \frac{\pi^3}{4} - \frac{8}{\pi} + \frac{\pi^3}{3}$$

$$= \pi\left(a - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(b + \frac{4}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi^3}{12} - \frac{8}{\pi}$$

よって $(a,b) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{4}{\pi}\right)$のとき $I(a,b)$は最小値 $\frac{\pi^3}{12} - \frac{8}{\pi}$ をとる.

② (1) だ円の接線公式より l および m は



$l:\ \frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b}y = 1$

$m:\ \frac{\cos(\theta+\frac{\pi}{2})x}{a} + \frac{\sin(\theta+\frac{\pi}{2})y}{b} = 1$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ なので $\cos\theta \neq 0$

したがって l より $x = \frac{a}{\cos\theta} - \frac{a}{b}\tan\theta\, y$

これを m の式に代入

$$-\frac{\sin\theta}{a}\left(\frac{a}{\cos\theta} - \frac{a}{b}\tan\theta \cdot y\right) + \frac{\cos\theta}{b}y = 1$$

$y = b(\cos\theta + \sin\theta)$

$x = a(\cos\theta - \sin\theta)$

$\underline{(c, d) = \left(a(\cos\theta - \sin\theta),\ b(\cos\theta + \sin\theta)\right)}$

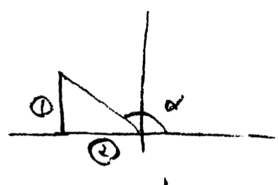
(2) $S = \frac{BD + CE}{2} \times DE = \frac{b\cos\theta + b\cos\theta + b\sin\theta}{2} \times (a\cos\theta - a\sin\theta - (-a\sin\theta))$

$= \underline{\frac{1}{2}ab(2\cos\theta + \sin\theta)\cos\theta}$

(3) $\frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2}ab((-2\sin\theta + \cos\theta)\cos\theta + (2\cos\theta + \sin\theta)(-\sin\theta))$

$= \frac{1}{2}ab(-4\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= \frac{1}{2}ab(-2\sin 2\theta + \cos 2\theta)$



$= \frac{1}{2}ab\sqrt{5}\sin(2\theta + \alpha)$ (ただし α は $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ を満たす)

$\frac{dS}{d\theta} = 0$ となるのは $2\theta + \alpha = \pi$

すなわち $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ のときで、このとき

S は最大.

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dS}{d\theta}$	/	$+$	0	$-$	/
S	ab	↗		↘	$\frac{3}{4}ab$

$S = \frac{1}{2}ab\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}ab\left(1 + \cos(\pi-\alpha) + \frac{1}{2}\sin(\pi-\alpha)\right)$

$= \frac{1}{2}ab\left(1 - \cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) = \frac{1}{2}ab\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \underline{\frac{1}{4}ab(2+\sqrt{5})}$

このとき、mの傾きは mの式より

$$-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{a}\times\frac{b}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=-\frac{b}{a}\times\frac{-\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{b}{a}\times\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

ここで $\tan\alpha=-\frac{1}{2}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ より

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}-1=4\tan\frac{\alpha}{2}$$

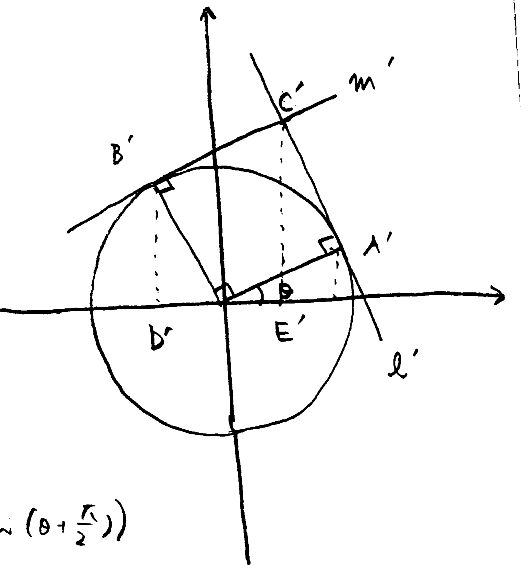
$$\tan\frac{\alpha}{2}=2\pm\sqrt{5}.$$

αは第2象限の角なので $\frac{\alpha}{2}$は第1象限の角.

したがって $\tan\frac{\alpha}{2}=2+\sqrt{5}$

よって. mの傾きは $\frac{b}{a}\times\frac{1}{2+\sqrt{5}}=\underline{\frac{b}{a}(\sqrt{5}-2)}$ //

② (別解)



(1) だ円および接線などを x 軸方向に $\frac{1}{a}$ 倍、y 軸方向に $\frac{1}{b}$ 倍する。A, B, C, D が A', B', C', D' に移るものとすると、変換後の図形は右のようになり、四角形 OA'C'B' は1辺の長さ1の正方形となる

$$\overrightarrow{OA'} = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \overrightarrow{OB'} = \left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

だから、

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = (\cos\theta - \sin\theta, \cos\theta + \sin\theta)$$

これを x 軸方向に a 倍、y 軸方向に b 倍したものが $\overrightarrow{OC}$ なので

$$\overrightarrow{OC} = (a(\cos\theta - \sin\theta), b(\cos\theta + \sin\theta))$$

$$\underline{(c, d) = (a(\cos\theta - \sin\theta), b(\cos\theta + \sin\theta))}_{//}$$

(2) 台形 C'B'D'E' の面積 S' は

$$S' = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\theta + \sin\theta\right) \times \cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cos\theta(\sin\theta + 2\cos\theta)$$

S は S' を ab 倍したものになるので

$$S = \frac{1}{2}ab\cos\theta(\sin\theta + 2\cos\theta)$$

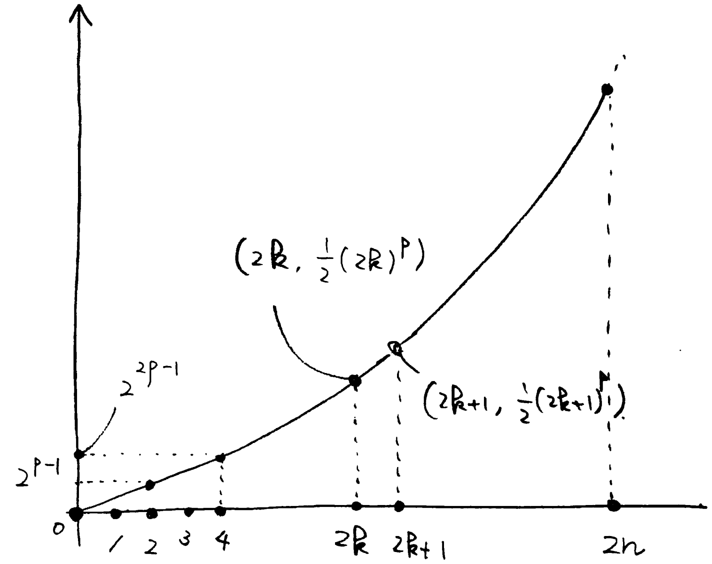
⋮

1.

(1) $x=2k$ のとき $(0 \leq k \leq n)$

$$\frac{1}{2}(2k)^p = 2^{p-1}k^p$$

は整数なので、$x=2k$ 上にある格子点は $2^{p-1}k^p+1$



$x=2k+1$ のとき

$\frac{1}{2}(2k+1)^p$ について

$(2k+1)^p$ は奇数なので、

$x=2k+1$ 上にある格子点のうち y座標が最大のものは

$$\frac{1}{2}\left\{(2k+1)^p-1\right\}$$

したがって格子点は $\frac{1}{2}(2k+1)^p-\frac{1}{2}+1$ 存在する。

以上より

$$L_p(n) = \sum_{k=0}^{n}\left(2^{p-1}k^p+1\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}(2k+1)^p+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{2}(2k)^p+1\right\} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(2k-1)^p+\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(2k)^p + (n+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^p + \frac{1}{2}n$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}k^p + \frac{3}{2}n + 1$$

$$= 1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}k^p$$

証明終

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}k^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1+\frac{3}{2}n}{n^{p+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\right\}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\int_0^2 x^p\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_0^2 = \frac{2^{p+1}}{2(p+1)} = \underline{\frac{2^p}{p+1}}$$

④ (1) $\overrightarrow{AB} = (2, t+1, 1-t)$, $\overrightarrow{AC} = (0, s+1, -1)$

条件より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ なので $(t+1)(s+1) + (1-t)(-1) = 0$

これを整理して $(1+t)s = -2t$

$t > -1$ より $1+t \neq 0$ なので $\underline{s = \dfrac{-2t}{1+t}}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 0$ より $2p + (t+1)q + (1-t)r = 0$ …①

$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = 0$ より $(s+1)q - r = 0$ …②

②より $r = (s+1)q$ を①に代入

$$2p + (1+t)q + (1-t)(s+1)q = 0$$

$$p = -\frac{1}{2}\left((1+t) + (1-t)(s+1)\right)q$$

sを消去して $r = \dfrac{1-t}{t+1}q$, $p = -\dfrac{t^2+1}{t+1}q$

条件より $r^2+p^2+q^2 = 1$ なので これに上の式を代入

$$\left\{\left(\frac{1-t}{t+1}\right)^2 + \left(-\frac{t^2+1}{t+1}\right)^2 + 1\right\}q^2 = 1$$

$$q^2 = \frac{(t+1)^2}{t^4+4t^2+3}$$

$t > -1$, $p > 0$ より $q < 0$ と分かるので $q = -\dfrac{t+1}{\sqrt{t^4+4t^2+3}}$

以上より

$$\underline{(p, q, r) = \left(\frac{t^2+1}{\sqrt{t^4+4t^2+3}}, \frac{-(t+1)}{\sqrt{t^4+4t^2+3}}, \frac{t-1}{\sqrt{t^4+4t^2+3}}\right)}$$

(3) DがABCの作る平面上に存在するとき $\overrightarrow{AD}$が平面の法線ベクトルに垂直となっている よって

$$\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3, 3, 1)\cdot(t^2+1, -t-1, t-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}, 1$$

証明終

外積

$\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$

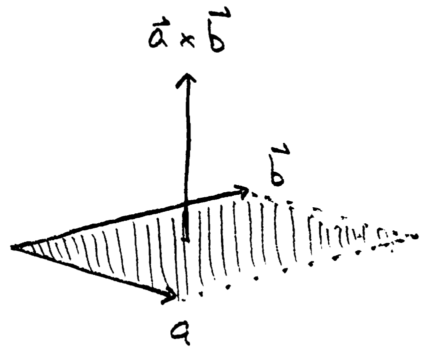
としたとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積は

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_a z_b - z_a y_b,\ z_a x_b - x_a z_b,\ x_a y_b - y_a x_b)$$

と定義されるベクトルで、$\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に垂直で、

その大きさは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の作る平行四辺形の面積に一致する

大学で習う概念ですが、
高校の入試問題でも使える
場面の多い公式です。
(記述式テストだと、検算に使うのが良い)



$$\begin{array}{cccc} y_a & z_a & x_a & y_a \end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_a z_b - z_a y_b,\ z_a x_b - x_a z_b,\ x_a y_b - y_a x_b)$$

$$\begin{array}{cccc} y_b & z_b & x_b & y_b \end{array}$$

(例)

$\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (4, 5, 6)$ の

両方に垂直なベクトルは、

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ (& -7 & 8 & 2) \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{array}$$

$\underline{(-7, 8, 2)}$