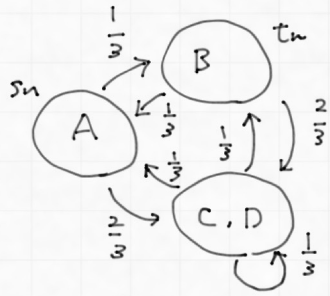
同志社大学2021 理工

1 (1)



左の遷移図より $s_{n+1} = \frac{1}{3}t_n + \frac{1}{3}(1-s_n-t_n) = \frac{1}{3}(1-s_n)$

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{3}(1-s_n-t_n) = \frac{1}{3}(1-t_n)$$

$$s_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(s_n - \frac{1}{4}\right), \quad s_1 = 0$$

$$\therefore s_n - \frac{1}{4} = \left(s_1 - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$s_n = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$

$$s_2 = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \qquad s_3 = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{2}{9}$$

$$t_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(t_n - \frac{1}{4}\right), \quad t_1 = \frac{1}{3}$$

$$t_n - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$t_n = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

よって $s_{n+1} = t_n$,

$$t_{n+1} - \frac{1}{3}s_n = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}t_n$$

$t_{n+1} - \frac{1}{3}s_n = \frac{2}{3}t_n$ に $t_n = s_{n+1}$ を代入

$$s_{n+2} - \frac{1}{3}s_n = \frac{2}{3}s_{n+1}$$

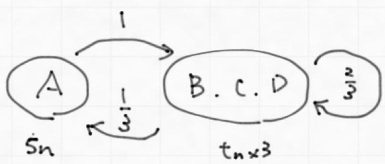
$\alpha^2 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\alpha$ より

$\alpha = 1, -\frac{1}{3}$

$$s_{n+2} - s_n = \left(-\frac{1}{3}\right)(s_{n+1} - s_n)$$

(誘導に従うと…)

B. C. Dは 対等だから. 動点PがB.C.Dにある確率は全て等しく t_n



$$s_{n+1} = \frac{1}{3}(3t_n) = t_n, \quad 3t_{n+1} = s_n + \frac{2}{3}3t_n$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{2}{3}t_n$$

t_nを消去して

$$s_{n+2} = \frac{1}{3}s_n + \frac{2}{3}s_{n+1}$$

$$s_{n+2} - s_{n+1} = \left(-\frac{1}{3}\right)(s_{n+1} - s_n)$$

(2) x^2で割る

$$x^2+cx+c+\frac{c}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{x})^2-2+c(x+\frac{1}{x})+c=0 \Leftrightarrow t^2-2+ct+c=0 \Leftrightarrow t^2+ct+c-2=0$

$t^2+ct+c-2=f(t)$ とおく.

$f(t)=0$ の判別式をDとすると $D=c^2-4(c-2)=(c-2)^2+4>0$

だから $f(t)=0$ は2つの実数解を持つ.

ここで $t=x+\frac{1}{x}$ について. $x>0$のとき. $t=x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$,

$t<0$のとき. $t=-(-x-\frac{1}{x})\leqq -2\sqrt{(-x)(-\frac{1}{x})}=-2$ だから. (*)が実数解をもつのは、$f(t)=0$が.

$t\leqq -2$,または$t\geqq 2$ の範囲に解をもつときで、(*)が虚数解のみを解にもつのは $f(t)=0$が.

$-2<t<2$の範囲の実数解のみを持つときとなる. そのための条件は

$f(t)$の軸. $t=-\frac{c}{2}$が $-2<-\frac{c}{2}<2 \Leftrightarrow -4<c<4$ を満たし.

端点 $f(2)=3c+2>0$ かつ $f(-2)=-c+2>0$ を満たすときで.

$$-\frac{2}{3}<c<2$$

$f(t)=0$ の解は $t=\frac{-c\pm\sqrt{D}}{2}$

$x+\frac{1}{x}=\frac{-c\pm\sqrt{D}}{2} \Leftrightarrow x^2-\frac{-c\pm\sqrt{D}}{2}x+1=0$

実数係数の2次方程式が虚数解をもつとき. その共役複素数も解にもつので

$x^2-\frac{-c+\sqrt{D}}{2}x+1=0$ の虚数解をα. $\bar{\alpha}$とすると $\alpha\bar{\alpha}=1$, $\alpha+\bar{\alpha}=\frac{-c+\sqrt{D}}{2}$

$x^2-\frac{-c-\sqrt{D}}{2}x+1=0$ の虚数解をβ. $\bar{\beta}$とすると $\beta\bar{\beta}=1$, $\beta+\bar{\beta}=\frac{-c-\sqrt{D}}{2}$

よって4つの解は全て. 原点を中心とした半径1の円周上に存在する

4点が正方形となるのは $\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}=\frac{-c+\sqrt{D}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ かつ $\frac{\beta+\bar{\beta}}{2}=\frac{-c-\sqrt{D}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ のときで

$\frac{-c+\sqrt{D}}{4}+\frac{-c-\sqrt{D}}{4}=0$ より $c=0$ これは $-\frac{2}{3}<c<2$ を満たす.

2

(1) $f'(x) = \sin(x^2) + x \times 2x \times \cos(x^2) = \sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)$

接線は $y = \left(\sin(a^2) + 2a^2\cos(a^2)\right)(x - a) + a\sin(a^2)$

$\therefore$ $\boldsymbol{y = \left(\sin(a^2) + 2a^2\cos(a^2)\right)x - 2a^3\cos(a^2)}$

(2) (1)の式に $x = 0$, $y = 0$ を代入.

$$2a^3\left(\cos(a^2)\right) = 0$$

$a > 0$ だから $\cos(a^2) = 0$ $\qquad a^2 = \frac{\pi}{2} + (n-1) \times \pi = n\pi - \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{a_n = \sqrt{n\pi - \frac{\pi}{2}}}$

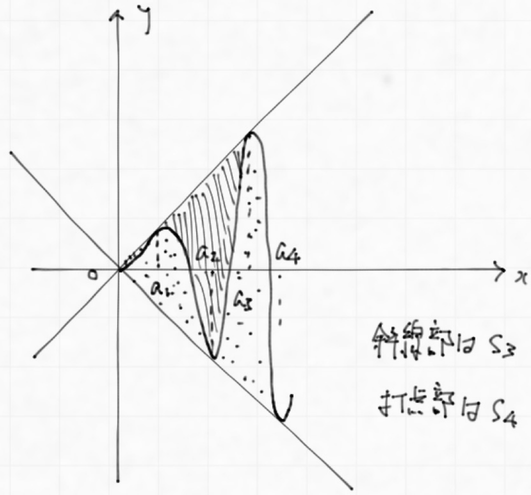
nが偶数のとき. $y = \left(\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 2\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right)x - 2\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)x = -x$ $\qquad \therefore y = -x$

nが奇数のときも同様 $y = x$

l_nは **nが偶数のとき $y = -x$. 奇数のとき $y = x$**

(3) nが偶数のとき



斜線部はS_3

打点部はS_4

$$S_{n+1} = \int_0^{a_{n+1}} x - x\sin(x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_0^{a_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}\cos(a_{n+1}^2) - \left(0 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(n\pi + \pi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(n\pi + \pi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(n\pi + \pi - \frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$S_n = \int_0^{a_n} x\sin(x^2) + x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(x^2) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{a_n} = -\frac{1}{2}\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$S_{n+1} - S_n = \cancel{\frac{1}{2}n\pi} + \frac{1}{2}\pi - \cancel{\frac{1}{4}}\pi - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}n\pi} + \cancel{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\pi - 1}$$

3

(1) $\frac{d}{dx}f_n(x) = \frac{2nx^{2n-1}(1-x^2) - x^{2n}\times(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(n-nx^2+x^2)x^{2n-1}}{(1-x^2)^2}$

$\frac{d}{dx}f_n(x) = 0$となるのは $x = \pm\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ のときで、$n = 1, 2, 3, \ldots$ のとき $\frac{n}{n-1} > 1$ だから

$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ で $\frac{d}{dx}f_n(x) \geqq 0$ であり、$f_n(x)$ は単調に増加する

よって $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ の範囲の $f_n(x)$ の最大値は $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\times 2^{-2n} = \frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}$

(2) $T_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{2n}}{1-x^2}dx \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{2n}}{1-0}dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \cdots ①$

$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ において $\frac{x^{2n}}{1-x^2} \geqq 0$ だから $T_n \geqq 0 \cdots ②$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = 0 \cdots ③$

①②③ より、はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} T_n = 0$

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2k}dx = \left[\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2k+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$

$\int_0^{\frac{1}{2}} S_{n+1}(x)dx - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k(2k+1)} = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2} + x^{2n}dx - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k(2k+1)}$

$= \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2k}dx\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)4^k} + \frac{1}{1\times 2^1}$

$= \frac{1}{2}$

(4) $S_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2} = \frac{1\cdot(1-x^{2n})}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{x^{2n}}{1-x^2} = g(x) - f_n(x)$

$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\times\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\Big[-\log|1-x| + \log|1+x|\Big]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left(\log\frac{3}{2} - \log\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log 3$

(5) (3)より $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k(2k+1)} = -1 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} S_{n+1}(x)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}(g(x) - f_{n+1}(x))dx - 1$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\log 3 - 2T_{n+1} - 1 = \log 3 - 2T_{n+1} - 1$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k(2k+1)} = \lim_{n\to\infty}\{\log 3 - 2T_{n+1} - 1\} = \log 3 - 1$

4

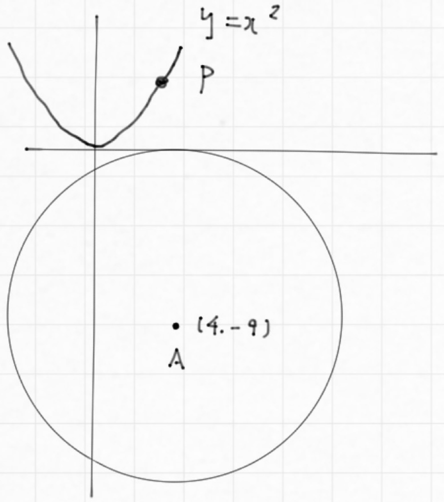
(1) $t=4$ のとき $P_0(4,16)$

$\overrightarrow{AP_0}=(0,25)$ だから $\dfrac{\overrightarrow{AP_0}}{|\overrightarrow{AP_0}|}=$ $\mathbf{(0,1)}$

$\overrightarrow{P_0Q}=\overrightarrow{P_0A}+\overrightarrow{AQ}$

$\overrightarrow{AQ}$ は大きさ 9 のベクトル だから

$|\overrightarrow{P_0Q}|\leqq|\overrightarrow{P_0A}|+|\overrightarrow{AQ}|=25+9=34$



等号は $\overrightarrow{P_0A}\,//\,\overrightarrow{AQ}$ のときで **Q(4,-18)** のとき

(2) Pにおける接線は $y'=2x$ だから $y=2p(x-p)+p^2$

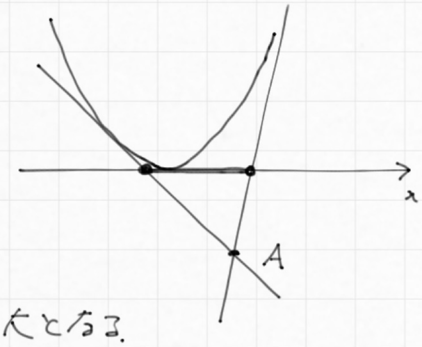
これが $A(4,-9)$ を通るとき、 $-9=2p\times4-p^2 \Leftrightarrow (p-9)(p+1)=0$ $\quad p=9,-1$

接線は $y=18x-81$, $y=-2x-1$

それぞれとx軸との交点は $x=\dfrac{81}{18}=\dfrac{9}{2}$, $x=-\dfrac{1}{2}$

よってPがDを動くとき、APとx軸との交点のx座標の

最大値は $\mathbf{\dfrac{9}{2}}$、最小値は $\mathbf{-\dfrac{1}{2}}$



(3) RがAPとCの交点のうち、y座標の小さい方となるとき、PRが最大となる。

$\overrightarrow{AR}=\dfrac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{AP}|}\times9$ となるので $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{4}{|\overrightarrow{AP}|}\overrightarrow{PA}$

$$\overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix}4\\-9\end{pmatrix}+\frac{9}{|\overrightarrow{AP}|}\begin{pmatrix}4-t\\-9-t^2\end{pmatrix}$$

$$x(t)=4+\frac{9(4-t)}{\sqrt{(4-t)^2+(9+t^2)^2}}$$

$-t=s$ とおいて、

$$\lim_{t\to-\infty}x(t)=\lim_{s\to\infty}x(-s)=\lim_{s\to\infty}\left(4+\frac{9(4+s)}{\sqrt{(4+s)^2+(9+s^2)^2}}\right)=\lim_{s\to\infty}\left(4+\frac{9(\frac{4}{s}+1)}{\sqrt{(\frac{4}{s}+1)^2+(\frac{9}{s}+s)^2}}\right)=\mathbf{4}$$

$$\lim_{t\to-\infty}y(t)=\lim_{s\to\infty}y(-s)=\lim_{s\to\infty}\left(-9-\frac{9(9+s^2)}{\sqrt{(4+s)^2+(9+s^2)^2}}\right)=\lim_{s\to\infty}\left(-9-\frac{9(\frac{9}{s^2}+1)}{\sqrt{(\frac{4}{s^2}+\frac{1}{s^2})^2+(\frac{9}{s^2}+1)^2}}\right)$$

$$=-9-\frac{9\cdot1}{1}=\mathbf{-18}$$

(4) (2)より $t=-1$ のとき $x(t)$ は最大となる。

$$x(-1)=4+\frac{9(4+1)}{\sqrt{(4+1)^2+(9+1)^2}}=4+\frac{9\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{5}}=\mathbf{4+\frac{9\sqrt{5}}{5}}$$