①

(1) 題意の条件は

(i) 放物線が$(1,1)$を通る

(ii) 〃 の $x=1$ における傾きが、直線の傾き 2 と等しい。

(iii) $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもつ（判別式 D が正または 0）

(i)より $a+b+c=1$

(ii)より $y'=2ax+b$ $\quad 2a+b=2$.

(iii)より $D=b^2-4ac\geqq 0$.

以上の条件を整理する。

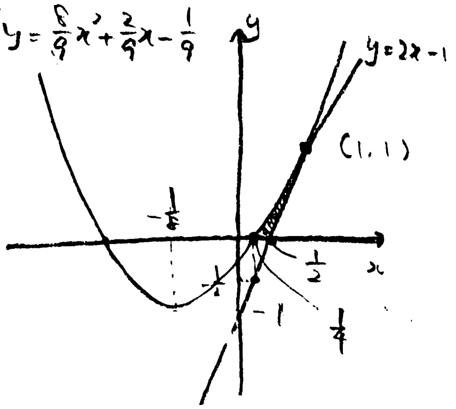
$b=2-2a$. $\quad c=1-a-b=1-a-2+2a=a-1$.

$D=(2-2a)^2-4a(a-1)=4a^2-8a+4-4a^2+4a=-4a+4\geqq 0$

$\therefore$ $\underline{b=2-2a,\ c=a-1,\ a\leqq 1}$

(2) $a=\frac{8}{9}$ のとき $\quad b=\frac{16}{9}$, $c=-\frac{1}{9}$

$y=\frac{8}{9}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{1}{9}$.



放物線と x 軸の交点は

$8x^2+2x-1=0$ より $\quad x=\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

$x>0$ の範囲の交点は $x=\frac{1}{4}$

$y=2x-1$ の $x=\frac{1}{4}$ のときの y 座標は $y=2\times\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}$

よって、もとめる面積 S は

$$S=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{8}{9}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{1}{9}-(2x-1)\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left|0-\frac{1}{2}\right|$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{8}{9}(x-1)^2dx-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\left[\frac{8}{27}(x-1)^3\right]_{\frac{1}{4}}^{1}-\frac{1}{16}$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^3-\frac{1}{16}=\underline{\frac{1}{16}}$$

② (1)

(i) $n=1$のとき

左辺 $= a_1^2$, 右辺 $= 1 \times a_1^2$ ∴ 成り立つ.

(ii) $n=l$のとき.

$\left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)^2 \leqq l \sum_{k=1}^{l} a_k^2$ が成り立つと仮定する.

このとき.

$n=l+1$のときの

$\left(\sum_{k=1}^{l+1} a_k\right)^2 \leqq (l+1) \sum_{k=1}^{l+1} a_k^2$ が成り立つことを示す …(*)

(*)の右辺 − (*)左辺

$$= (l+1)\sum_{k=1}^{l+1} a_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{l+1} a_k\right)^2$$

$$= l\sum_{k=1}^{l} a_k^2 + l a_{l+1}^2 + \sum_{k=1}^{l+1} a_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{l} a_k + a_{l+1}\right)^2$$

$$\geqq \cancel{\left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)^2} + l a_{l+1}^2 + \sum_{k=1}^{l+1} a_k^2 - \cancel{\left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)^2} - 2a_{l+1}\sum_{k=1}^{l} a_k - a_{l+1}^2 \quad (\because 仮定)$$

$$= l a_{l+1}^2 + \sum_{k=1}^{l} a_k^2 - 2a_{l+1}\sum_{k=1}^{l} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{l}\left(a_{l+1}^2 - 2a_{l+1}a_k + a_k^2\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{l}\left(a_{l+1} - a_k\right)^2$$

$$\geqq 0$$

よって命題は$n=l$のときに成り立つとすれば$l+1$のときも成り立つ.

(i)(ii)より数学的帰納法により命題は成り立つことが示された.

また等号は, $a_k = a_n$ が $k \leqq n$を満たす全てのkについて成り立つときに成立するので, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$のときに成り立つ.

(2) サイコロの目について、1〜6の目が出る確率をp_1〜p_6とする。

このとき(1)より

$$\left(\sum_{k=1}^{6} p_k\right)^2 \leqq 6\sum_{k=1}^{6} p_k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leqq 6\sum_{k=1}^{6} p_k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{6} p_k^2 \geqq \frac{1}{6}$$

ここで上式の左辺は、サイコロを2回投げるとき、同じ目が続けて出る確率に等しく、またこれが$\frac{1}{6}$以上であることを示している。

また、サイコロに偏りがあるとき、$p_1 = p_2 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$とはならないので等号は成立しない。

以上より、偏りを持つサイコロを2回投げたとき、同じ目が続けて出る確率は$\frac{1}{6}$よりも大きいことが示された。

③

(1) $f(x) = x(1+x)^n$ とおく.

$$f'(x) = (1+x)^n + x \times n(1+x)^{n-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} {}_nC_l\, x^l + nx \sum_{l=0}^{n-1} {}_{n-1}C_l\, x^l$$

上式中で x の k 次の項は

$${}_nC_k\, x^k \text{ と, } nx\ {}_{n-1}C_{k-1}\, x^{k-1}.$$

したがって、その係数は, ${}_nC_k + n\,{}_{n-1}C_{k-1} = {}_nC_k + k\,{}_nC_k = \underline{(k+1)\,{}_nC_k}$

(2)

(1)より

$$(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\,{}_nC_k\, x^k$$

両辺を x 倍する.

$$x(1+x)^n + nx^2(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\,{}_nC_k\, x^{k+1}$$

両辺を x で微分

$$(1+x)^n + x \times n(1+x)^{n-1} + 2nx(1+x)^{n-1} + n(n-1)x^2(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2\,{}_nC_k\, x^k$$

$x=1$ を代入

$$2^n + n2^{n-1} + n2^n + n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2\,{}_nC_k$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2\,{}_nC_k = 2^{n-2}(n^2 - n + 4n + 2n + 4)$$

$$= 2^{n-2}(n^2 + 5n + 4)$$

$$= (n+1)(n+4)2^{n-2}$$

証明終

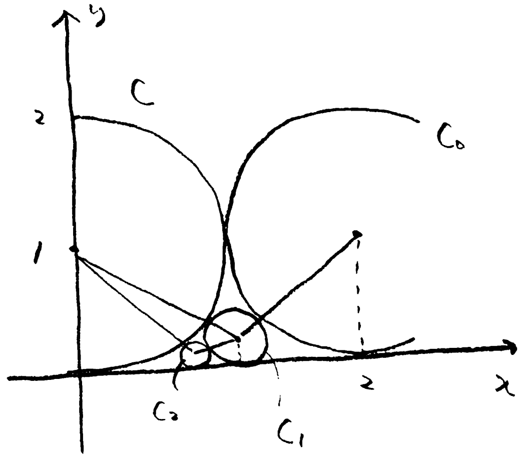
④ (1) C_1の中心は$(1, a_1)$

CとC_1の中心間の距離が$1+a_1$となるので

$$\sqrt{1^2+(1-a_1)^2}=1+a_1$$

$$1+1-2a_1+a_1^2=1+2a_1+a_1^2$$

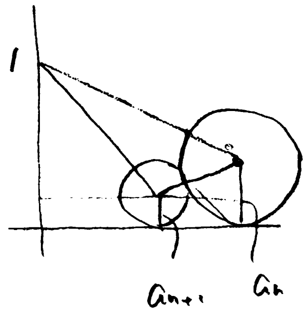
$$\underline{a_1=\frac{1}{4}}$$



(2) 右図でC_n, C_{n+1}の中心を

(x_n, a_n), (x_{n+1}, a_{n+1})

とすると、中心間距離が半径の和になっていることから、



$$\begin{cases} x_n^2+(1-a_n)^2=(1+a_n)^2 & \cdots ① \\ x_{n+1}^2+(1-a_{n+1})^2=(1+a_{n+1})^2 & \cdots ② \\ (x_n-x_{n+1})^2+(a_n-a_{n+1})^2=(a_{n+1}+a_n)^2 & \cdots ③ \end{cases}$$

①より $x_n=2\sqrt{a_n}$　　②より $x_{n+1}=2\sqrt{a_{n+1}}$

③より

$$x_n-x_{n+1}=2\sqrt{a_na_{n+1}}$$

$$\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{a_na_{n+1}}$$

$\sqrt{a_n}=\dfrac{1}{b_n}$, $\sqrt{a_{n+1}}=\dfrac{1}{b_{n+1}}$を代入

$$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n}\times\frac{1}{b_{n+1}}$$

$$b_{n+1}-b_n=1$$

$$\underline{b_{n+1}=b_n+1}$$

(3) $b_n = b_1 + (n-1) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} + (n-1) = n+1$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{a_n}} = n+1 \qquad \therefore a_n = \underline{\frac{1}{(n+1)^2}}$

⑤ $x \leqq 0$ のとき $1-ax^2 \geqq 1$ となるので $\cos x \leqq 1-ax^2$ は常に成り立つ

$a>0$ のときについて考える

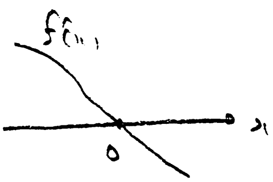
$f(x) = 1-ax^2-\cos x$ とおく

$f'(x) = -2ax + \sin x$

$f''(x) = -2a + \cos x$

ここで $a \geqq \frac{1}{2}$ のとき $f''(x) = -2a+\cos x < -1+\cos x \leqq 0$

となるので $f''(x)$ は常に負の値をとる。

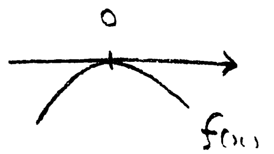


$f'(0) = 0+0 = 0$ だから

$f(x)$ は $x>0$ のとき $f'(x)<0$

$x<0$ 〃 $f'(x)>0$

となる。つまり、$f(x)$ は $x=0$ で極大値をとる。



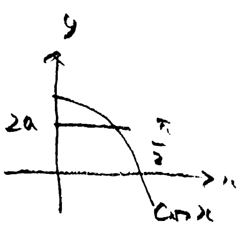
$f(0) = 1-0-1 = 0$ だから $f(x)$ のグラフの概形は右のようになり

このとき、$f(x)$ が常に正となることはない。

次に

$0<a<\frac{1}{2}$ のとき

$f''(x) = -2a+\cos x = 0$ となる x が存在する。



$f(x)$ は偶関数なので以下 $x>0$ の範囲で考えると

$f''(x) = 0$ となる x を α とすると $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\alpha = 2a$

$f'(0) = 0$ だから $f'(x)$ の増減は右のようになり

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
f''		$+$	0	$-$	
f'	0	↗		↘	

$0<x<\frac{\pi}{2}$ において $f(x) \geqq 0$ となる条件は

$f(0) \geqq 0$ かつ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqq 0$ となることであることが分かる

$f(0) = 0$.

$f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi^2}{4}a - 0 \geqq 0$

$$a \leqq \frac{4}{\pi^2}$$

このうち、最大のaは　$\underline{a = \frac{4}{\pi^2}}$ //