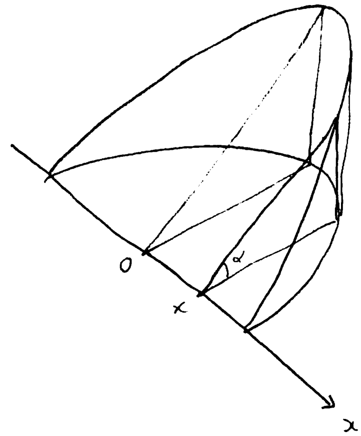
①

(1) 右図のように中心を原点とした、直径を含む方向に x 軸をとる。

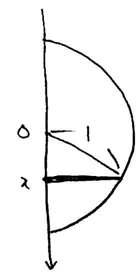


x 軸と垂直な平面と、立体の切り口は直角三角形で、その底辺の長さは $\sqrt{1-x^2}$

高さは $\sqrt{1-x^2}\tan\alpha$ となるので、断面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{1-x^2}\tan\alpha$$

これを0から1まで積分したものが、立体の体積の $\frac{1}{2}$ となるので

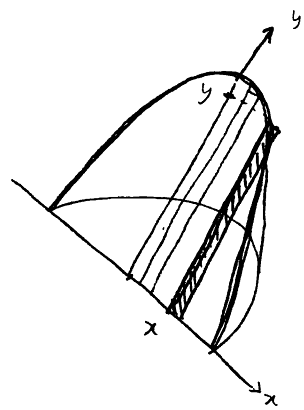


$$V = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}^{\,2}\tan\alpha\, dx$$

$$= \tan\alpha\int_0^1 1-x^2\, dx$$

$$= \tan\alpha\left[x-\frac{1}{3}x^3\right] = \underline{\frac{2}{3}\tan\alpha}$$

(2) 右図のように x 軸に垂直な平面と立体の切り口の直角三角形の斜辺の方向に y 軸をとると



$$y = \sqrt{1-x^2}\times\frac{1}{\cos\alpha}$$

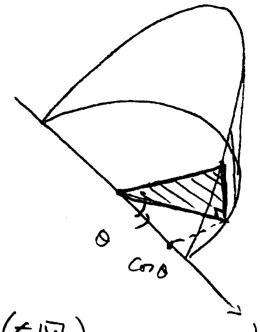
これを0から1まで積分したものが、切り口の面積 A の $\frac{1}{2}$ となっている

$$A = 2\int_0^1 y\, dx = \frac{2}{\cos\alpha}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$x=\sin\theta$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$, $\begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \hline \theta & 0\to\frac{\pi}{2}\end{array}$

$$A = \frac{2}{\cos\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{\cos\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{\pi}{2\cos\alpha}}$$



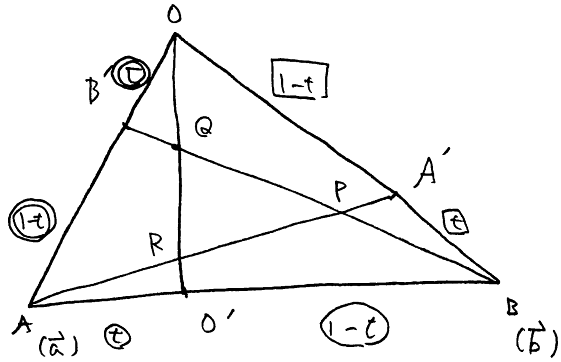
(3) 原点を極として、x 軸正方向を基準とした極座標を考える(右図)。

切り口の三角形の高さは、x 座標が $\cos\theta$ だから $\sin\theta\tan\alpha$

したがって側面積は

$$B = \int_0^{\pi}\sin\theta\tan\alpha\, d\theta = \tan\alpha\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \underline{2\tan\alpha}$$

②



(1) $\overrightarrow{OO'} = t\vec{b} + (1-t)\vec{a}$

(2) メネラウスの定理より

$$\frac{BA}{BO'} \times \frac{O'R}{RO} \times \frac{OA'}{A'B} = 1$$

$$\frac{1}{t} \times \frac{O'R}{RO} \times \frac{1-t}{t} = 1$$

$$OR : RO' = 1-t : t^2$$

(3) $\triangle ORA = \triangle OAO' \times \dfrac{1-t}{1-t+t^2}$ (∵ (2))

$$= \triangle OAB \times t \times \frac{1-t}{t^2-t+1}$$

$$= \frac{t(1-t)}{t^2-t+1} S$$

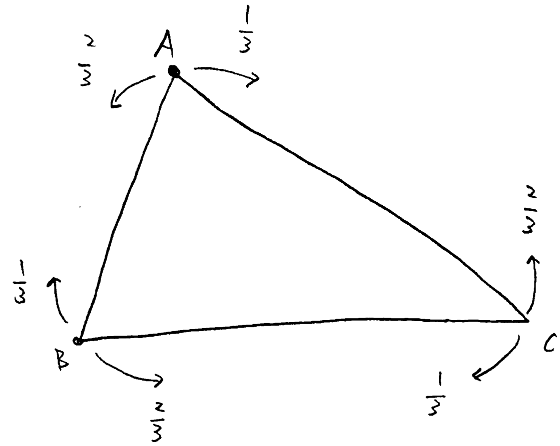
同様に、$\triangle APB = \triangle BQO = \dfrac{t(1-t)}{t^2-t+1} S$

よって $M = S - 3 \times \dfrac{t(1-t)}{t^2-t+1} S = \dfrac{S}{t^2-t+1}\left(t^2-t+1-3t+3t^2\right)$

$$= \frac{4t^2-4t+1}{t^2-t+1} S$$

[redacted]

③



(1) $n+1$ 秒後に A にあるのは、

n 秒後 C にあって A に移る

$c_n \times \frac{2}{3}$

n 秒後 B にあって A に移る

$b_n \times \frac{1}{3}$

のいずれか。

よって $\therefore\ a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n$

同様に $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n$, $c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}a_n$

(2)

$$a_{n+2} = \frac{1}{3}b_{n+1} + \frac{2}{3}c_{n+1}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}a_n\right)$$

$$= \frac{4}{9}(a_n + b_n) + \frac{1}{9}c_n$$

$$= \frac{4}{9}(1 - c_n) + \frac{1}{9}c_n \qquad (\because\ a_n + b_n + c_n = 1)$$

$$\therefore\ \underline{a_{n+2} = -\frac{1}{3}c_n + \frac{4}{9}}$$

(3) (2)と同様に $c_{n+2} = -\frac{1}{3}b_n + \frac{4}{9}$, $b_{n+2} = -\frac{1}{3}a_n + \frac{4}{9}$

$$a_{n+6} = -\frac{1}{3}c_{n+4} + \frac{4}{9} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}b_{n+2} + \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}a_n + \frac{4}{9}\right) + \frac{8}{27} = -\frac{1}{27}a_n + \frac{28}{81}$$

$$\therefore\ \underline{a_{n+6} = -\frac{1}{27}a_n + \frac{28}{81}}$$

(4) $a_{n+6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{27}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$ と変形できる。

$$a_{6k+1} - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{27}\right)^1 \left(a_{6k-5} - \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{27}\right)^2 \left(a_{6k-11} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \cdots = \left(-\frac{1}{27}\right)^k \left(a_1 - \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{27}\right)^k \left(0 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{27}\right)^k$$

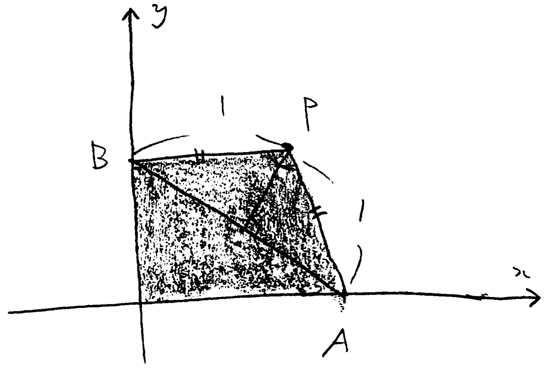
$$\therefore \quad \underline{a_{6k+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{27}\right)^k} \,_{//}$$

④

(1) $\angle APB$を固定すると、(θとする

$\triangle APB$の形は常に一定で

$$\triangle APB = \frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta.$$



$\triangle OAB$の面積は

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}ab$$

またABの長さも一定で、

$$AB = 2\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

よって

$$a^2+b^2 = 4\sin^2\frac{\theta}{2} \geqq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab = 4\triangle OAB$$

つまり

$$\triangle OAB \leqq \sin^2\frac{\theta}{2}$$

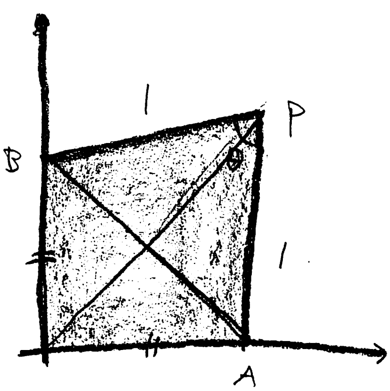
であり、等号は$a=b$のとき成り立つので、Sは$a=b$のとき最大となり、

このとき、$\triangle PAB$が二等辺三角形であることから、PはABの垂直二等分線の$y=x$上にある。

よってSが最大となるとき、$a=b$ かつ $x=y$.

(2)

$AB = 2\sin\frac{\theta}{2}$ なので $OA = x = \sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}$



$$\begin{aligned}S &= \triangle OAB + \triangle PAB \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sin\theta \\ &= \frac{1-\cos\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$0<\theta<\pi$ だから、$\theta = \frac{3}{4}\pi$ のとき Sは最大値 $\underline{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}$ をとる