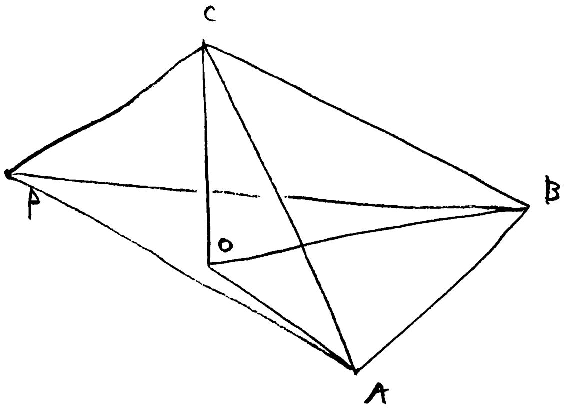


① $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=h$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$.

(1) $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{CP}$ と $\overrightarrow{CA}$ が垂直なので

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

$(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\alpha+h^2=0$ $\alpha=-h^2$

$\overrightarrow{CP}$ と $\overrightarrow{CB}$ が垂直なので、

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

$(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=4\beta+h^2=0$ $\beta=-\frac{1}{4}h^2$

以上より $\overrightarrow{OP}=-h^2\vec{a}-\frac{1}{4}h^2\vec{b}$.

$\underline{\alpha=-h^2,\ \beta=-\frac{1}{4}h^2}$ //

(2) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=-h^2\left(\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=-h^2\left(-1+\frac{1}{4}\times 2^2\right)=0$.

よって $OP\perp AB$

(3)

$\overrightarrow{OP}=-h^2\vec{a}-\frac{1}{4}h^2\vec{b}$

$=-\frac{5}{4}h^2\left(\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}\right)$

よって 直線OPと線分ABの交点をHとすると、$AH:HB=1:4\neq 1:1$

であり これは $\overline{AP}\neq\overline{AB}$ であることを示している

証明終

②

(1) $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = -1$ のとき.

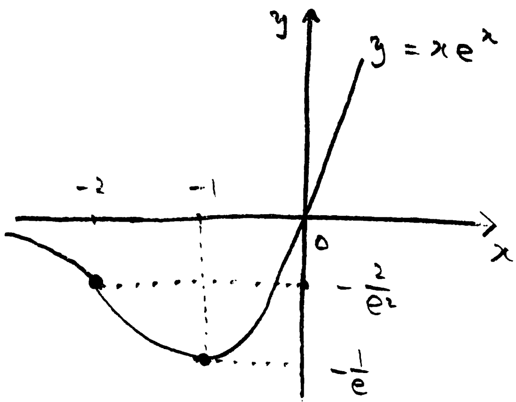
$f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$

$f''(x) = 0$ となるのは $x = -2$ のとき.

$$\left(\lim_{x \to \infty} xe^x = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \right)$$

増減は下のとおりで、グラフの概形は右下のとおり.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	↘	$-2e^{-2}$	↘	$-e^{-1}$	↗



(2)

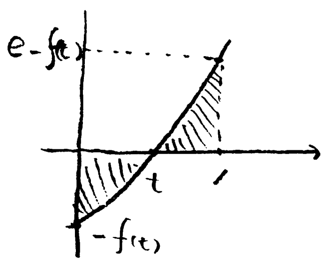
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + C$$

(Cは積分定数)

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \times \frac{1}{2}e^{2x} - \int \cancel{2}x \times \cancel{\tfrac{1}{2}}e^{2x} dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left(x \times \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx \right)$$
$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$
$$= \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 - 2x + 1) + C$$

(Cは積分定数)

(3)



$$V(t) = \int_0^t \pi\{-g(t)\}^2 dx + \int_t^1 \pi\{g(t)\}^2 dx$$
$$= \int_0^1 \pi(xe^x - te^t)^2 dx$$
$$= \int_0^1 \pi(x^2e^{2x} - 2te^t xe^x + t^2e^{2t}) dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1) - 2te^t(x-1)e^x + t^2e^{2t}x\right]_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4}e^2 - 0 + t^2e^{2t}\right) - \pi\left(\frac{1}{4}\times 1 - 2te^t(-1)\times 1 + 0\right)$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4}e^2 + t^2e^{2t} - \frac{1}{4} - 2te^t\right)$$

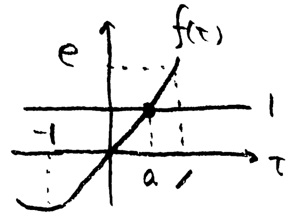
$$= \underline{\pi t^2e^{2t} - 2\pi te^t + \frac{1}{4}\pi e^2 - \frac{1}{4}\pi}$$

(4)

$$\frac{dV(t)}{dt} = 2t\pi e^{2t} + 2\pi t^2e^{2t} - 2\pi e^t - 2\pi te^t$$

$$= 2\pi e^t(te^t + t^2e^t - 1 - t)$$

$$= 2\pi e^t(1+t)(te^t - 1)$$



ここで $te^t = f(t)$ となっているので(1)のグラフより $te^t = 1$ となるようなtは1つ存在し、また $0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x)$ は単調増加関数であり、$f(0) = 0$, $f(1) = e > 1$ より、$f(t) = 1$ となるようなtは $0 < t < 1$ を満たしている(このときのtをbとおく)

V(t)の増減は右のようになる

t	0	…	b	…	1
$V'(t)$	−	−	0	+	+
$V(t)$		↘		↗	

よって $a = b$ であり

$$f(a) = ae^a = \underline{1}$$

$$V(a) = \pi a^2e^{2a} - 2\pi ae^a + \frac{1}{4}\pi e^2 - \frac{1}{4}\pi$$

$$= \pi\times 1^2 - 2\pi\times 1 + \frac{1}{4}\pi e^2 - \frac{1}{4}\pi$$

$$= \underline{\frac{1}{4}\pi e^2 - \frac{5}{4}\pi}$$

③

(1) Pは $y=-x+s$ 上の点だから

$$\log_3 t = -t + s \quad \cdots ①$$

ここで、$(t, \log_3 t)$ の $y=x$ についての対称点 $(\log_3 t, t)$ は逆関数 $y=3^x$ 上にあり、また $(\log_3 t, t)$ は①より、$y=-x+s$ 上にも存在するので

Qは $(\log_3 t, t)$ と一致する。

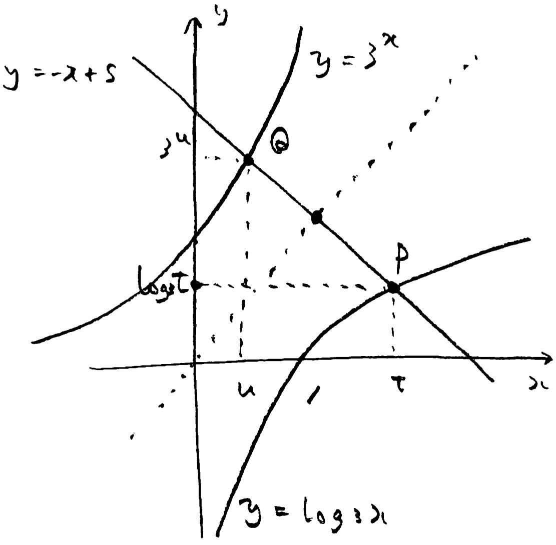
よって $\quad u=\log_3 t, \quad 3^u = t \quad \cdots ②$

PQの中点は

$$\left(\frac{t+u}{2}, \frac{\log_3 t + 3^u}{2}\right) = \left(\frac{t+\log_3 t}{2}, \frac{\log_3 t + t}{2}\right) \quad (\because ②)$$

$$= \left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) \quad (\because ①)$$

証明終



(2) ①、②より

$$t+u = t+\log_3 t = s$$

また②より

$$u = \log_3 t$$

証明終

(3) $$\lim_{t\to 3} \frac{s(s-t)-k}{t-3} = \lim_{t\to 3} \frac{-st+s^2-k}{t-3}$$

ここで分母 $t-3$ は $t\to 3$ のとき 0 に収束するので上の極限値が有限の値に収束するためには分子も0に収束することが必要

$$\lim_{t\to 3}(-st+s^2-k) = \lim_{t\to 3}\left\{-t(t+\log_3 t)+(t+\log_3 t)^2-k\right\} = -3\times(3+1)+(3+1)^2-k=0$$

よって $k=4$.

このとき極限値は

$$\lim_{t\to 3}\frac{-t(t+\log_3 t)+(t+\log_3 t)^2-4}{t-3}$$

$$=\lim_{t\to 3}\frac{t\log_3 t+(\log_3 t)^2-4}{t-3}$$

$$=\lim_{t\to 3}\frac{(t-3)\log_3 t+(\log_3 t+4)(\log_3 t-1)}{t-3}$$

ここで $\displaystyle\lim_{t\to 3}\frac{\log_3 t-1}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{\log_3 t-\log_3 3}{t-3}$ …(*)

となるので(*)は $\log_3 t=f(x)$ としたとき $f'(3)$ と一致する.

$f'(x)=\dfrac{1}{\log_e 3}\times\dfrac{1}{x}$ だから $f'(3)=\dfrac{1}{3\log_e 3}$

よって $$\lim_{x\to 3}\frac{(t-3)\log_3 t+(\log_3 t+4)(\log_3 t-1)}{t-3}$$

$$=1+5\times\frac{1}{3\log_e 3}=1+\frac{5}{3\log_e 3}$$

④

(1) 公比は $x(1-ax)$ だから収束するための条件は

$-1 < x(1-ax) < 1$

$\Leftrightarrow \quad ax^2-x-1<0$ かつ $ax^2-x+1>0$

ここで $ax^2-x+1=0$ の判別式を D とすると $D=1-4a<-3$ $(\because a>1)$

となるので上の不等式は $ax^2-x-1<0$ より

$$\underline{\frac{1}{2a}(1-\sqrt{1+4a}) < x < (1+\sqrt{1+4a})\times\frac{1}{2a}}_{//}$$

このとき

$$S(x) = a\times\frac{1}{1-x(1-ax)} = \underline{\frac{a}{1-x+ax^2}}_{//}$$

(2)

$$S'(x) = \frac{-a(2ax-1)}{(ax^2-x+1)^2}$$

$S'(x)=0$ となるのは $x=\frac{1}{2a}$ のとき、で $a>1$ だから

$$0<\frac{1}{2a}<\frac{1}{2a}(1+\sqrt{1+4a})$$

$$1-\sqrt{1+4a}<1-\sqrt{5}<0,$$

だから $\frac{1}{2a}(1-\sqrt{1+4a})<\frac{1}{2a}<(1+\sqrt{1+4a})\times\frac{1}{2a}$

よって $S(x)$ の増減は下のようになる

x	$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$	$\cdots$	$\frac{1}{2a}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$
$S'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$S(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$S\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{a^2}{4a-1}$$

$\frac{1}{2a}(1\pm\sqrt{1+4a})$ は $ax^2-x-1=0$ の解なので $\alpha=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$, $\beta=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$ として

$$S(\alpha) = \frac{a}{1-\alpha+a\alpha^2} = \frac{a}{a\alpha^2-\alpha-1+2} = \frac{a}{2}$$

$$S(\beta) = \frac{a}{1-\beta+a\beta^2} = \frac{a}{a\beta^2-\beta-1+2} = \frac{a}{2}$$

以上より $\underline{\dfrac{a}{2} < a \leqq \dfrac{a^2}{4a-1}}$

(3)

$$I(a) = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{a}{ax^2-x+1}dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x^2-\frac{x}{a}+\frac{1}{a}}dx = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{(x-\frac{1}{2a})^2+\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}}dx$$

$x-\dfrac{1}{2a} = \sqrt{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{4a^2}}\tan\theta$ とおく. $\dfrac{dx}{d\theta} = \sqrt{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{4a^2}}\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0 \to \frac{1}{a}$
θ	$-\gamma \to \gamma$

$$\tan\gamma = \frac{\frac{1}{2a}}{\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{4a-1}}$$

$$I(a) = \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \times \frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}} \times \sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{4a}{\sqrt{4a-1}}\gamma$$

ここで $\sqrt{4a-1} = \dfrac{1}{\tan\gamma}$, $4a = \dfrac{1}{\tan^2\gamma}+1$ だから

$$I(a) = \left(\frac{1}{\tan^2\gamma}+1\right)\gamma\tan\gamma = \frac{1}{\sin^2\gamma}\cdot\gamma\cdot\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{2\gamma}{\sin 2\gamma}$$

$a \to \infty$ のとき $\tan\gamma \to 0$ より $\gamma \to 0$ だから.

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = \lim_{\gamma\to 0}\frac{2\gamma}{\sin 2\gamma} = \underline{1}$$