①(1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく. $(r > 0)$

$z^6 + 27 = 0 \Leftrightarrow r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = -27.$

$\Leftrightarrow r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = \sqrt{3}^6(\cos\pi + i\sin\pi)$

$r = \sqrt{3}.\quad 6\theta = \pi + 2m\pi.\quad (m = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$

$r = \sqrt{3}\ ,\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}m\pi\quad (m = 0, \cdots 5).$

$z = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}m\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}m\pi\right)\right)$

$= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \sqrt{3}i, \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right), -\sqrt{3}i, \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= \underline{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \sqrt{3}i,\ -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\sqrt{3}i,\ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ //

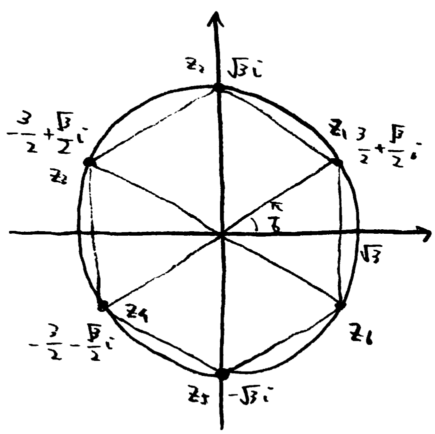
(2) $z_1 z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \times \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$= 3\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i$

$z_1 z_2 - z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

$z_1 z_2 - z_1 = -3 + \sqrt{3}i$

$\frac{z_1 z_2 - z_1}{z_1 z_2 - z_2} = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i} = 2$

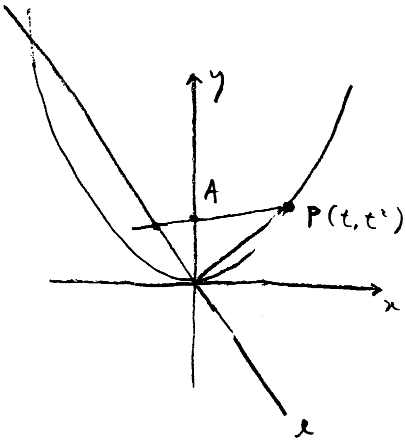


これは $z_1z_2 - z_1$ と $z_1z_2 - z_2$ が平行であることを示している.

よって z_1, z_2, z_1z_2 は同一直線上に存在する.

② (1) OPの傾きは $\frac{t^2-0}{t-0}=t$.

したがって l の傾きは $-\frac{1}{t}$ で、l は $y=-\frac{1}{t}x$



APは $y=\frac{t^2-a}{t}x+a$

連立すると、 $-\frac{1}{t}x=\frac{t^2-a}{t}x+a$

$$\frac{-1-t^2+a}{t}x=a.$$

$$\frac{t^2+(1-a)}{t}x=-a \quad \cdots ①$$

ここで $0<a\leqq 1$ だから $0\leqq 1-a<1$ であり、$t>0$ より $t^2+(1-a)>0$

したがって ①は

$$x=\frac{-at}{t^2+1-a}$$

となり、これは交点が存在することを示している。

$$y=-\frac{1}{t}\times\frac{-at}{t^2+1-a}=\frac{a}{t^2+1-a}$$

よって、 $\underline{Q(u,v)=\left(\frac{-at}{t^2+1-a},\ \frac{a}{t^2+1-a}\right)}$

(2) $u=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $v=1$ となる t が $t>0$ の範囲に存在する。

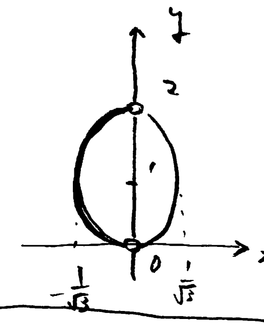
$$\frac{-at}{t^2+1-a}=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{a}{t^2+1-a}=1$$

$\Leftrightarrow$ $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{a}{\frac{1}{3}+1-a}=1$ より $\underline{a=\frac{2}{3}}$

$3x^2+(y-1)^2=1$

$x<0,\ y>0$

下図太線部



$a=\frac{2}{3}$ のとき

$$u=\frac{-\frac{2}{3}t}{t^2+\frac{1}{3}}<0,\quad v=\frac{\frac{2}{3}}{t^2+\frac{1}{3}}>0$$

$u=-vt$

$v\neq 0$ だから $t=-\frac{u}{v}$ これを v の式に代入。

$$v=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{u^2}{v^2}+\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{u^2}{v}+\frac{1}{3}v=\frac{2}{3} \Leftrightarrow u^2+\frac{1}{3}v^2-\frac{2}{3}v=0$$

$$\Leftrightarrow u^2+\frac{1}{3}(v-1)^2=\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow 3u^2+(v-1)^2=1$$

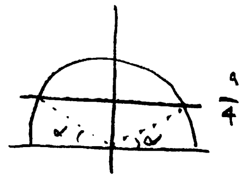
中心 $(0,1)$ のだ円

$(v>0,\ u<0)$

③(1) $f(x)-g(x)=h(x)$ とおく

$h(x)=3-a\sin x-2\cos^2 x$

$h'(x)=-a\cos x+4\cos x\sin x=\cos x(4\sin x-a)$

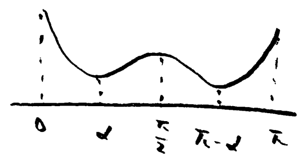


$\cos x=0$, $\sin x=\frac{a}{4}$ のとき $h'(x)=0$

$\sin x=\frac{a}{4}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ を満たす x を α とすると右図より $\sin(\pi-\alpha)=\frac{a}{4}$, $(\frac{\pi}{2}<\pi-\alpha<\pi)$

$h(x)$ の増減は下のようになる

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	π
$h'(x)$	$-a$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	a
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	



$h(\alpha)=3-a\sin\alpha-2\cos^2\alpha=3-a\sin\alpha-2(1-\sin^2\alpha)$

$=3-a\times\frac{a}{4}-2+2\times\frac{a^2}{16}=\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}+1=-\frac{a^2}{8}+1$

$h(\pi-\alpha)=3-a\sin(\pi-\alpha)-2\cos^2(\pi-\alpha)=3-a\sin\alpha-2\cos^2\alpha=-\frac{a^2}{8}+1$

$0\leqq x\leqq\pi$ において、$f(x)\geqq g(x)$ を満たすためには、$0\leqq x\leqq\pi$ において $h(x)\geqq 0$ が成り立てばよく、そのための条件は、最小値の $h(\alpha)=h(\pi-\alpha)\geqq 0$ が成り立てばよい。

$h(\alpha)=-\frac{a^2}{8}+1\geqq 0$ $\quad a^2\leqq 8$ $\quad -2\sqrt{2}\leqq a\leqq 2\sqrt{2}$

$0<a<3$ だから、 $\underline{0<a\leqq 2\sqrt{2}}$

(2) (1)の $h(x)=0$ が $0\leqq x\leqq\pi$ で2つの解を持てばよい

$h(0)=h(\pi)=1$, $h(\alpha)=h(\pi-\alpha)=-\frac{a^2}{8}+1$ だから、そのためには

$h(\alpha)=h(\pi-\alpha)=0$ でなければならず、このとき $\underline{a=2\sqrt{2}}$

また $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ なので $\alpha=\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore\ \underline{x_1=\frac{\pi}{4},\ x_2=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi}$

(3) $S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}f(x)-g(x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}3-2\sqrt{2}\sin x-1-\cos 2x\,dx=\left[2x+2\sqrt{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$

$=\frac{3}{2}\pi-2+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}-2+\frac{1}{2}=\underline{\pi-3}$

④(1) 数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき、$a_1=3>\sqrt{7}$

(ii) $n=k$ のとき $a_k>\sqrt{7}$ が成り立つと仮定する。

このとき $a_{k+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{7}{a_k}\right)-\sqrt{7}=\frac{1}{2a_k}(a_k-\sqrt{7})^2>0$ (∵仮定)

よって $a_{k+1}>\sqrt{7}$.

(i)(ii)より、数学的帰納法により、題意は示された

(2) $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-\sqrt{7}}{a_{n+1}+\sqrt{7}}=\frac{\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)-\sqrt{7}}{\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)+\sqrt{7}}=\frac{a_n^2+7-2\sqrt{7}a_n}{a_n^2+7+2\sqrt{7}a_n}=\frac{(a_n-\sqrt{7})^2}{(a_n+\sqrt{7})^2}=\left(\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}\right)^2=b_n^2$

(3) $b_1=\frac{a_1-\sqrt{7}}{a_1+\sqrt{7}}=\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=8-3\sqrt{7}$.

$b_{n+1}=b_n^2$ の両辺の自然対数をとると、$\log b_{n+1}=2\log b_n$.

$\{\log b_n\}$ は初項 $\log b_1$，公比2の等比数列だから $\log b_n=(\log(8-3\sqrt{7}))2^{n-1}$

$\therefore\ b_n=(8-3\sqrt{7})^{(2^{n-1})}$

$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}a_n-\frac{7}{2a_n}=\frac{1}{2a_n}(a_n^2-7)>0$. (∵ $a_n>\sqrt{7}$)

したがって $a_n<a_{n-1}<\cdots<a_1=3$. であり $a_n\leqq 3$.

$b_n=\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}$ より $a_n-\sqrt{7}=b_n(a_n+\sqrt{7})$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{7})=\lim_{n\to\infty}\left\{(8-3\sqrt{7})^{(2^{n-1})}\times(a_n+\sqrt{7})\right\}=(*)$

ここで $a_n\leqq 3$. であり $8^2-(3\sqrt{7})^2=1$ より $8-3\sqrt{7}>0$.

また $8-3\sqrt{7}-1=7-3\sqrt{7}$. $7^2-(3\sqrt{7})^2=-14$ だから. $8-3\sqrt{7}<1$.

よって $(*)=0$ であり. $\underline{\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{7}}$ //

$2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})=2^{-n}\log\{b_n(a_n+\sqrt{7})\}=2^{-n}\{\log b_n+\log(a_n+\sqrt{7})\}$

$=2^{-n}\{2^{n-1}\log(8-3\sqrt{7})+\log(a_n+\sqrt{7})\}$

$=2^{-1}\log(8-3\sqrt{7})+\frac{\log(a_n+\sqrt{7})}{2^n}\longrightarrow\frac{1}{2}\log(8-3\sqrt{7})$

$\therefore\ \underline{\lim_{n\to\infty}2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})=\frac{1}{2}\log(8-3\sqrt{7})}$ //