①

(1) AにおけるHの接線は$x=-1$.

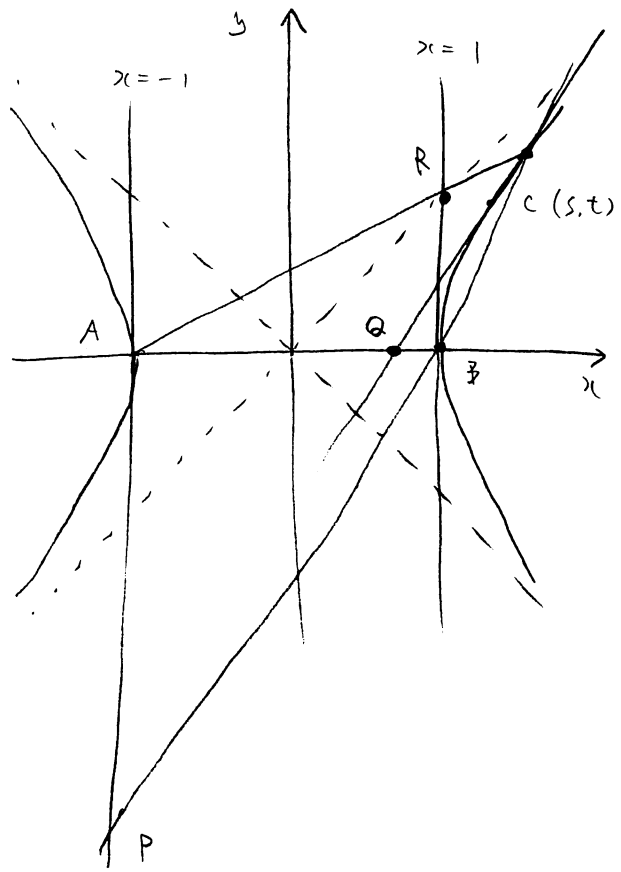
$t \neq 0$なので $s \neq \pm 1$なので直線BCは

$$y = \frac{t}{s-1}(x-1)$$

これと$x=-1$との交点のy座標は

$$y = \frac{-2t}{s-1}$$

$$\therefore P\left(-1, \frac{-2t}{s-1}\right)$$



(2) Hにおける接線は、

$$sx - ty = 1.$$

直線ABはx軸であり、$y=0$.

$y=0$のとき、$x = \frac{1}{s}$　　$\therefore Q\left(\frac{1}{s}, 0\right)$

(3) Bにおける接線は$x=1$.

直線ACは(1)と同様に　$y = \frac{t}{s+1}(x+1)$

$x=1$のとき　$y = \frac{2t}{s+1}$

よって　$R\left(1, \frac{2t}{s+1}\right)$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{s}+1, \frac{2t}{s-1}\right),\ \overrightarrow{RQ} = \left(\frac{1}{s}-1, \frac{-2t}{s+1}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{s+1}{s}, \frac{2t}{s-1}\right) = \frac{s+1}{1-s}\left(\frac{1-s}{s}, \frac{-2t}{s+1}\right) = \frac{s+1}{1-s}\overrightarrow{RQ}$$

となるので P, Q, Rは一直線上にある

証明終

②

$z^5=1$ より $|z^5|=1 \Leftrightarrow |z|=1$.

したがって z は $z=\cos\theta+i\sin\theta$ と表すことができる.

z の実部と虚部はともに正であるから, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とすることができ,

また $z^5=\cos 5\theta+i\sin 5\theta=1$ より $5\theta=2\pi$. $\theta=\frac{2}{5}\pi$.

よって

$$z=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi.$$

(1) $z^5-1=0$ より. $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$.

であり $z\neq 1$ だから

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0 \quad \cdots ①$$

5回とも表がでたとき. $a_0=a_1=\cdots=a_4=1$ なので.

$$w=z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

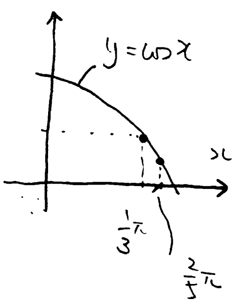
$\therefore$ $\underline{w=0}$

(2) $a_0=a_2=a_3=0$, $a_1=a_4=1$ のとき

$$w=z+z^4=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{8}{5}\pi+i\sin\frac{8}{5}\pi$$

$$=\cos\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi-i\sin\frac{2}{5}\pi$$

$$=2\cos\frac{2}{5}\pi$$



ここで $\frac{2}{5}\pi>\frac{1}{3}\pi$ だから $\cos\frac{2}{5}\pi<\cos\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}$

よって $2\cos\frac{2}{5}\pi<2\times\cos\frac{1}{3}\pi=1$.

よって $|w|=2\cos\frac{2}{5}\pi<1$. 証明終

(3)

(i) 5回とも表のとき

(1) より $w=0$. よって $|w|=0<1$

(ii) 4回表のとき

$a_k=0$ とすると

$$w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 - z^k$$

$$= -z^k$$

$$\therefore \ |w| = |-z^k| = 1$$

(iii) 3回表のとき

$a_5 = a_0$ と考える。$a_k = a_{k+1} = 0$, 他は1とすると

$$|w| = |-z^k - z^{k+1}|$$

$$= |-z^k(1+z)| = |1+z| = \sqrt{\left(\cos\frac{2}{5}\pi + 1\right)^2 + \sin^2\frac{2}{5}\pi}$$

$$> \cos\frac{2}{5}\pi + 1 > 1.$$

$a_6 = a_1$, $a_5 = a_0$ と考えて、$a_k = a_{k+2} = 0$ 他は1とすると

$$|w| = |-z^k - z^{k+2}| = |-z^{k+1}||z^{-1} + z|$$

$$= |z^{-1} + z| = \left|\cos\frac{2}{5}\pi - i\sin\frac{2}{5}\pi + \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right|$$

$$= 2\cos\frac{2}{5}\pi < 1.$$

以上より $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (0,0,1,1,1), (1,0,0,1,1), (1,1,0,0,1), (1,1,1,0,0), (0,1,1,1,0)$

のときは $|w| > 1$.

それ以外の3つが表のときは $|w| < 1$.

(iv) 2回表のとき

(iii)と同様. $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1,1,0,0,0), (0,1,1,0,0), (0,0,1,1,0), (0,0,0,1,1), (1,0,0,0,1)$

のとき $|w| < 1$. 他は $|w| > 1$.

(v) 1回表のとき.

$|w| = |z^k| = 1$ となる.

(vi) 0回表のとき

$w = 0$ なので $|w| < 0$.

(i)〜(vi) より $|w|<1$ となるのは

(i) 1 通り　(ii) 0 通り.　(iii) ${}_5C_3 - 5 = 5$ 通り.

(iv) 5 通り.　(v) 0 通り.　(vi) 1 通り.

全事象は 2^5 通りなので

$$\frac{1+5+5+1}{2^5} = \frac{3}{2^3} = \underline{\frac{3}{8}}$$ //

③ (1) Aより $-\frac{2}{b^4} < \frac{a}{b} - \sqrt{7} < \frac{2}{b^4}$

各辺に$2\sqrt{7}$を加えると.

$$\frac{2}{b^4} + 2\sqrt{7} < \frac{a}{b} + \sqrt{7} < \frac{2}{b^4} + 2\sqrt{7}.$$

ここで $b \geqq 2$ より $\frac{2}{b^4} \leqq \frac{2}{2^4} = \frac{1}{8}$,

$\sqrt{7} < 2.646$ より $2\sqrt{7} < 5.292$

だから.

$$\frac{2}{b^4} + 2\sqrt{7} < \frac{1}{8} + 5.292 = 5.417 < 6.$$

よって $\frac{a}{b} + \sqrt{7} < \frac{2}{b^4} + 2\sqrt{7} < 6$.

また $\frac{a}{b} + \sqrt{7} > -\frac{2}{b^4} + 2\sqrt{7} > -\frac{1}{8} + 2.645 \times 2 > 0 > -6$

以上より. $\left|\frac{a}{b} + \sqrt{7}\right| < 6$ 証明終

(2) (A)と(1)の不等式を辺々かけて.

$$\left|\frac{a^2}{b^2} - 7\right| < \frac{12}{b^4}$$

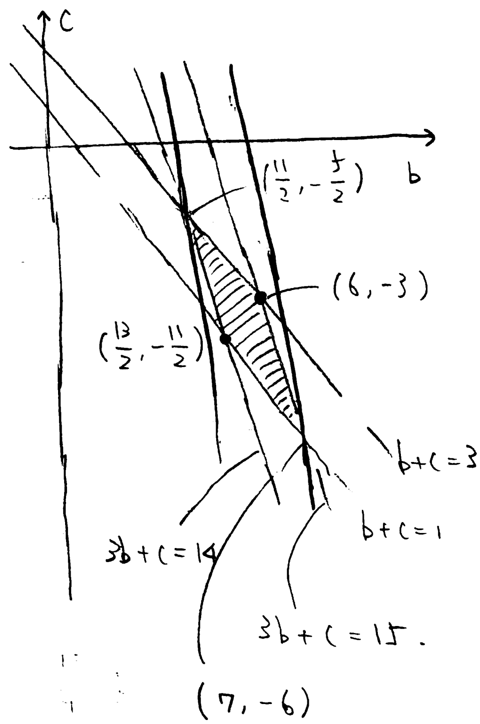
$$|a^2 - 7b^2| < \frac{12}{b^2} \leqq \frac{12}{4} \leqq 3.$$

$a^2 - 7b^2 = 0, \pm 1,$ のいずれか.

④ (1)

$0 \leqq f(1) \leqq 2 \iff 0 \leqq -1+b+c \leqq 2 \iff 1 \leqq b+c \leqq 3$

$5 \leqq f(3) \leqq 6 \iff 5 \leqq -9+3b+c \leqq 6 \iff 14 \leqq 3b+c \leqq 15$



上の2つの不等式を満たす領域をDとする。Dを図示すると右の斜線部となる

$f(4) = -16+4b+c = k$ とおくと

$c = -4b+k+16$

となり、傾きが-4の直線と考えることができる。右図より

$(b,c) = (\frac{11}{2}, -\frac{5}{2})$ のとき kは最小

$k = -16 + 4 \times \frac{11}{2} - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$

$(b,c) = (7,-6)$ のとき kは最大

$k = -16+4\times 7-6 = 6$.

よって $\underline{\frac{7}{2} \leqq f(4) \leqq 6}$

(2) $y = f(x) = -x^2+bx+c = -(x-\frac{b}{2})^2 + \frac{b^2}{4} + c$

$q = \frac{b^2}{4} + c \iff c = -\frac{b^2}{4} + q$

図より $(b,c) = (\frac{11}{2}, -\frac{5}{2})$ のとき、$q = \frac{121}{16} - \frac{5}{2} = \frac{81}{16}$

$(b,c) = (7,-6)$ のとき $q = \frac{49}{4} - 6 = \frac{25}{4}$

$(b,c) = (6,-3)$ のとき $q = 6$

$(b,c) = (\frac{13}{2}, -\frac{11}{2})$ のとき $q = \frac{169}{16} - \frac{11}{2} = \frac{81}{16}$

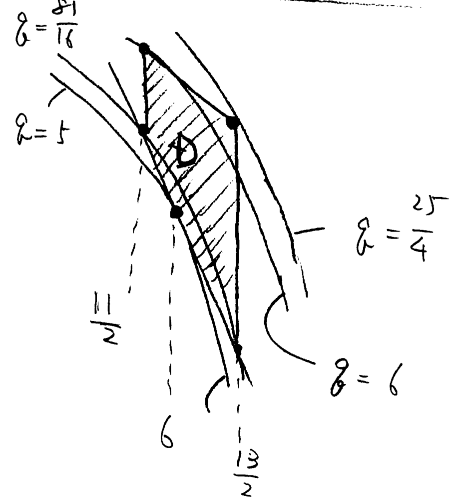
$3b+c=14$ と　$c=-\frac{b^2}{4}+q$ が接するとき

$3b-\frac{b^2}{4}+q-14=0$

$b^2-12b-4q+56=0$

$D=36+4q-56=4q-20=0$　$q=5$.

このとき $b=6$



以上より

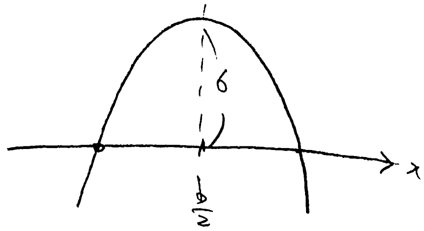
$5\leqq q\leqq\frac{25}{4}$

(3)　$\frac{b^2}{4}+c=q=6$

$f(x)=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+6$

$f(x)=0$ となるのは　$\frac{b}{2}\pm\sqrt{6}$

$$S=\int_{\frac{b}{2}-\sqrt{6}}^{\frac{b}{2}+\sqrt{6}}-f(x)\,dx$$



$$=\frac{1}{6}\left(\frac{b}{2}+\sqrt{6}-\frac{b}{2}+\sqrt{6}\right)^3$$

$$=\frac{1}{6}\times8\times6\sqrt{6}=8\sqrt{6}$$

⑤ (1)

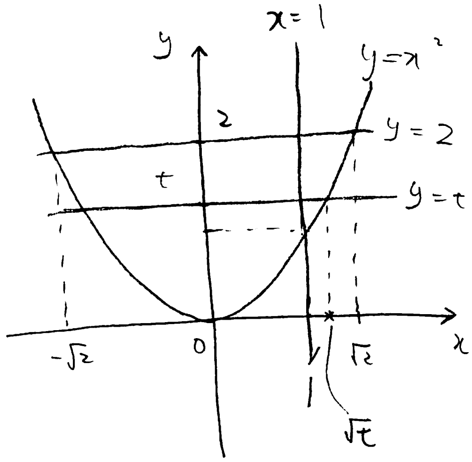
切断面は右下のようになり、

これを p,q 平面上にとる.

原点は L の断面の円の中心で

p軸上に $x=1$ からの距離が1となる

円の中心がくるようにとる.



2つの円を C_1, C_2 とし、

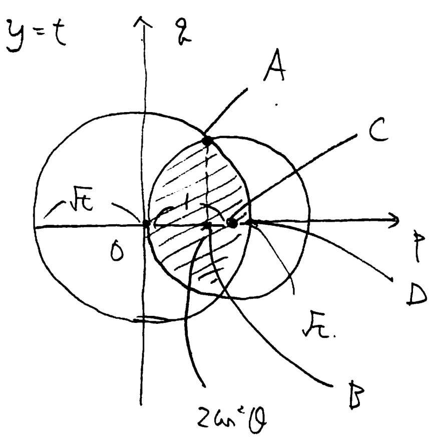
C_1: $p^2+q^2=t=(2\cos\theta)^2$

C_2: $(p-1)^2+q^2=1$.

とする. 交点は

$$2p-1=4\cos^2\theta-1$$

$$p=2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$$



A, B, C, D を図のようにとる.

$$\cos\angle AOB=\frac{2\cos^2\theta}{2\cos\theta}=\cos\theta \text{ となるので}$$

$$\angle AOB=\theta.$$

$$\cos\angle ADB=\frac{1-(1+\cos 2\theta)}{1}=-\cos 2\theta=\cos(\pi-2\theta)$$

$$\angle ADB=\pi-2\theta.$$

$$\text{よって } S(t)=\pi(2\cos\theta)^2\times\frac{2\theta}{2\pi}-\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\times\sin 2\theta$$

$$+\pi\times 1^2\times\frac{2(\pi-2\theta)}{2\pi}-\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin(2\pi-4\theta)$$

$$=4\theta\cos^2\theta-2\cos^2\theta\sin 2\theta+\pi-2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta$$

$$=2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi$$

(2)