D

(1) $\vec{OA}\cdot\vec{d}=0$ となるので

$\vec{OA}\cdot(\vec{OB}-t\vec{OA})=0$

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}-t|\vec{OA}|^2=0$

$-s+s+s-t(\sqrt{3}s)^2=0$

$3ts^2=+s$

$\underline{t=+\frac{1}{3s}}$ // $(\because s>0$ なので $s\neq 0)$

(2) $\vec{OA}\perp\vec{e}$ より $\vec{OA}\cdot\vec{e}=0$

$\Leftrightarrow\ \vec{OA}\cdot(\vec{OC}-u\vec{OA}-v\vec{OB})=0$

$\Leftrightarrow\ s-3us^2-vs=0\ \cdots①$

$\vec{d}\perp\vec{e}$ より $\vec{d}\cdot\vec{e}=0$

$\Leftrightarrow\ (\vec{OB}-t\vec{OA})\cdot(\vec{OC}-u\vec{OA}-v\vec{OB})=0$

$\Leftrightarrow\ 1-us-3v-ts+ut\times 3s^2+tvs=0\ \cdots②$

②に(1)の結果を代入

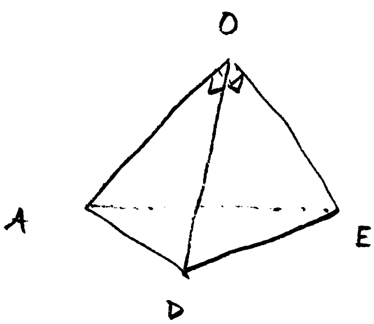
$2-5v-3us=0\ \cdots③$

①,③より v を消去して整理

$\underline{u=\frac{1}{4s}}$ //

これを③に代入整理して

$\underline{v=\frac{1}{4}}$ //



(3) $|\vec{OA}|=\sqrt{3}s$.

$\vec{OD}=\vec{OB}+\frac{1}{3s}\vec{OA}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ なので $|\vec{OD}|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\vec{OE}=\vec{OC}-\frac{1}{4s}\vec{OA}-\frac{1}{4}\vec{OB}=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ なので $|\vec{OE}|=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

OADEの体積が2なので

$2=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}s\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{6}\times\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{s}{3}$ $\qquad\underline{s=6}$ //

②

(1) $2f(x) = e^{x} - ae^{-x}$

$2e^{x}f(x) = e^{2x} - a$

$(e^{x})^2 - 2f(x)e^{x} - a = 0$

$e^{x} = f(x) \pm \sqrt{\{f(x)\}^2 + a}$

$e^{x} > 0$ なので　$e^{x} = f(x) + \sqrt{\{f(x)\}^2 + a}$

$x = \log_e \{ f(x) + \sqrt{\{f(x)\}^2 + a} \}$

よって　$\underline{f^{-1}(x) = \log_e (x + \sqrt{x^2 + a})}$

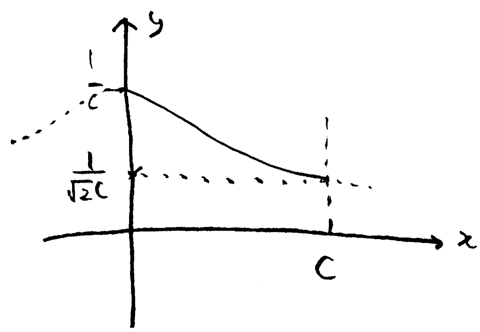
(2)

$$\{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+a}} \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+a}} \times 2x\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+a}} \times \frac{\sqrt{x^2+a} + x}{\sqrt{x^2+a}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}}$$

(3)

$x^2 + c^2$ は $x > 0$ で単調に増加するので、$\frac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ は $x > 0$ で単調に減少し、グラフの概形は右のようになる



したがって、もとめる面積 S は

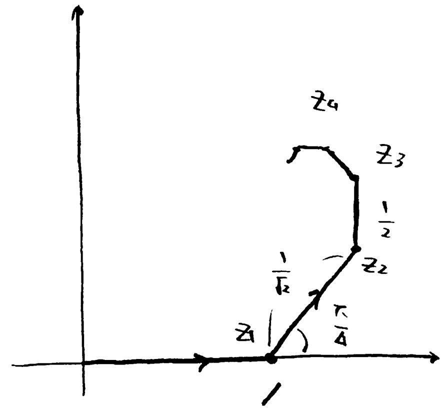
$$S = \int_0^c \frac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}\,dx$$

$$= \int_0^c \left(\log_e (x + \sqrt{x^2+c^2})\right)' dx \quad (\because (2))$$

$$= \left[\log_e (x + \sqrt{x^2+c^2})\right]_0^c$$

$$= \log(c + \sqrt{2}c) - \log c = \underline{\log(1+\sqrt{2})}$$

③



(1) $Z_1 = 1$

$Z_2 = Z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\alpha)^1 = \frac{3+i}{2}$

$Z_3 = Z_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(\sqrt{2}\alpha)^2 = Z_2 + \frac{1}{2}i = \underline{\frac{3+2i}{2}}$ //

$Z_4 = Z_3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3(\sqrt{2}\alpha)^3 = Z_3 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \underline{\frac{5}{4}(1+i)}$ //

(2) $Z_{n+1} = Z_n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n(\sqrt{2}\alpha)^n = Z_n + \alpha^n$

$\therefore Z_n = Z_1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{n-1}$

$= 1 \times \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = \underline{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}}$ //

(3) $|\alpha| < 1$ なので $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.

よって $\lim_{n\to\infty} Z_n = \frac{-1}{\alpha - 1} = \frac{1}{1-\alpha} \times \frac{1-\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} = \frac{1-\bar{\alpha}}{1-\alpha-\bar{\alpha}+\frac{1}{2}}$

$= \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \underline{1 + i \quad = w}$

(4) $Z_n = \frac{(1-\alpha^n)(1-\bar{\alpha})}{(1-\alpha)(1-\bar{\alpha})} = \frac{1-\alpha^n-\bar{\alpha}+\alpha^n\bar{\alpha}}{1-\alpha-\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}} = \frac{1-\alpha^n-\bar{\alpha}+\alpha^n\bar{\alpha}}{\frac{1}{2}}$

$= 2\left(1 - \bar{\alpha} - \alpha^n + \frac{1}{2}\alpha^{n-1}\right)$

$= 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos n\frac{\pi}{4} + i\sin n\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\left(\cos(n-1)\frac{\pi}{4} + i\sin(n-1)\frac{\pi}{4}\right)\right)$

その実部は $1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\cos(n-1)\frac{\pi}{4}$

これが w の実部の1より大きいので

$1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4} + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4} > 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{(n-1)\pi}{4} > \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) > \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{n\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{n}{4}\pi\right) > \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\sin\frac{n}{4}\pi > \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\sin\frac{n}{4}\pi - \cos\frac{n\pi}{4} > 0$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{n}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$n = 2,\ 3,\ 4,\ 10,\ 11,\ 12,\ 18\ldots$$

$$= \underline{2+8m,\ 3+8m,\ 4+8m \qquad (m=0,1,2,3\ldots)}$$

④

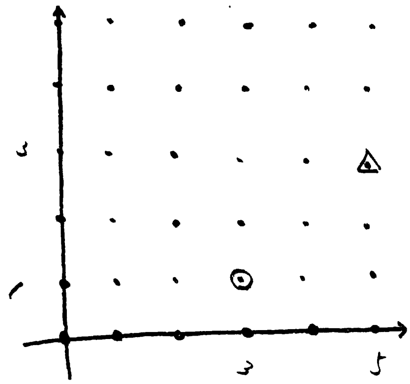
(1) 4回投げて、ちょうど $(3,1)$ に達するときを考えればよい

表を → 裏を ↑ と表すと、

(→→→↑), (→→↑→), (→↑→→),

(↑→→→)

の4通りが考えられるので $\dfrac{4}{2^4} = \dfrac{1}{4}$



(2) $(3,1)$ を通らずに ↑を5回 →を3回

$$\frac{{}_8C_5 - {}_4C_1 \times {}_4C_2}{2^8} = \frac{\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2} - 4\cdot6}{2^8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

(3) $(3,1)$ を通らないとき、$x_8 + y_8 = 8$ となる。

したがって、$x_8 + y_8 \leqq 4$ となるのは $(x_4, y_4) = (0,0)$ となる確率に等しい

$\dfrac{1}{4}$

(4) 点 $(3,1)$ に到達するのは $4m$ 回目 (m は整数) しかなく、

$4m$ 回目に $(3,1)$ に達し、Q が原点に戻されるためには

$4, 8, 12 \cdots 4(m-1), 4m$ 回の全てで $(3,1)$ に達する必要がある。

$x_{4n-4k} + y_{4n-4k} \geqq 4$ のとき、その後、$(3,1)$ に達することはないので $x_{4n}, y_{4n} \geqq 4 + 4k$ となるので、

$(x_{4n}, y_{4n}) \leqq 4k$ となるための必要条件は、$x_{4n-4k} + y_{4n-4k} < 4$

すなわち、$(x_{4n-4k}, y_{4n-4k}) = (0,0)$ のときに限られる

そして、これは、$4, 8, 12, \cdots 4n-4k$ 回のいずれのときも $(3,1)$ に達したことを意味しており、その確率は、$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-k}$

⑤

(1) 下2桁は

01 02 04 08 16 32 64 28 56 12 24 48 96 92,

84 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 04 08 ...

と変わっていくので 4から始まる循環の周期は 20

(2)

$A = \underline{4k = 25l + 1}$ $(k = 1, 2, 3\ldots,\ l = 0, 1, 2\ldots)$

—— 部を満たす k, l として $(k, l) = (19, 3)$ が考えられる

$$\begin{array}{rl} & 4 \cdot k = 25l + 1 \\ -) & 4 \cdot 19 = 25 \cdot 3 + 1 \\ \hline & 4(k-19) = 25(l-3) \end{array}$$

右辺は25の倍数なので $k - 19 = 25m$

左辺は4 〃 $l - 3 = 4m$

と表すことができ、これより $(k, l) = (25m + 19, 4m + 3)$

$(m = 0, 1, 2\ldots)$

よって $A = 4k = 100m + 76$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$

そのうち 2桁の自然数は $\underline{76}$ //

(3) (2)と同様に

$B = 8k = 125l + 1$

これを満たす k, l として $(k, l) = (47, 3)$

$8(k - 47) = 125(l - 3)$

$k = 125m + 47$

$l = 8m + 3$

$(m = 0, 1, 2\ldots)$

$B = 1000m + 376$

3桁となるのは $\underline{B = 376}$ //

(4) 2^mを125で割って1余るような最小の自然数mは100なので

$$2^{100} \equiv 1 \pmod{125} \quad \cdots ①$$

$\{x_n\}$の下3桁の周期をpとすると.

$$x_{n+p} - x_n = 2^{n+p} - 2^n = 1000a$$

と表せる。これより

$$2^n(2^p - 1) = 2^3 \cdot 5^3 a \quad \cdots ②$$

$n \geqq 3$のとき $$2^{n-3}(2^p - 1) = 5^3 a \quad \cdots$$

上式が成り立つためには $2^p - 1$ が 5^3 の倍数であることが

必要で、そのような最小のpは100 (∵①)

$2^p - 1 = 5^3 \times p'$ とすると ② は

$$2^{n-3} \cdot 5^3 p' = 5^3 a$$

$$a = 2^{n-3} p'$$

となり、そのような a は存在するので、pは100.

$n=1, 2$のとき、②は成立しないので循環は$n=3$から始まる.

以上より

$\{x_n\}$の下3桁はx_3から循環し、周期は100.