① (1) $4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta = 4\sin^3\theta + 3 - 3\sin^2\theta$

ここで $\sin\theta = X$ とおくと　$(0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$0 \leqq X \leqq 1.)$

与式を $f(x)$ として.

$f(x) = 4X^3 - 3X^2 + 3$.

$f'(x) = 12X^2 - 6X = 6X(2X-1)$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$, $f(0) = 3$, $f(1) = 4$.

X	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	4

$X = \frac{1}{2}$ のとき $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$,　$X = 1$ のとき $\theta = \frac{\pi}{2}$.

以上より $4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta$ の

最大値は 4 で、このとき $\theta = \frac{\pi}{2}$

最小値は $\frac{11}{4}$ で、このとき $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$.

(2) 対数をとると　$\log y = \frac{1}{x}\log x$

両辺を x で微分して　$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \times \log x + \frac{1}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}(1 - \log x) \times x^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x)$.

ここで $x > e$ のとき $\log x > 1$ なので. $\frac{dy}{dx}$ は常に負となる.

よって. y は減少関数である

証明終

$e < a < b$ のとき.　$a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$　($\because$ y は減少関数)

両辺を ab 乗して.　$a^b > b^a$

証明終

(3) $a_{n+1} - a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}(n+1)n - \left(\frac{3}{4}\right)^n n(n-1)$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^n n\left(-\frac{1}{4}n + \frac{7}{4}\right) = \underline{\frac{1}{4}n\left(\frac{3}{4}\right)^n(7-n)}$

$n=7$ のとき $a_8 - a_7 = 0$.

$n<7$ 〃 $a_{n+1} - a_n > 0$ $a_n < a_{n+1}$

$n>7$ 〃 $a_{n+1} - a_n < 0$ $a_n > a_{n+1}$

$a_1 < a_2 < \cdots < a_6 < a_7 = a_8 > a_9 > a_{10} > \cdots$

となるので. $n=7, 8$ のとき a_n は最大となる.

(4). $w = \frac{z+3i}{z}$ より. $zw - z = 3i$

$w=1$ とすると成り立たないので $w \neq 1$. なので.

$z = \frac{3i}{w-1}$

これを $|z|=3$ に代入.

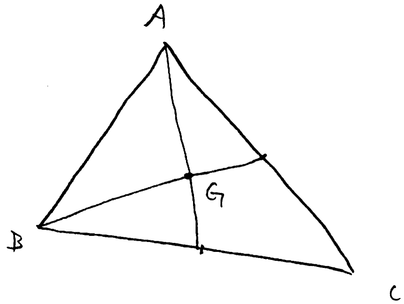
$\left|\frac{3i}{w-1}\right| = 3$

$\Leftrightarrow$ $|w-1| = 1$.

Q(w) は 中心 1. 半径 1 の円周上を動く.

②

(1) Gは中線の交点なので△ABCの重心



よって

$$\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

(2) $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{PQ}$

$\Leftrightarrow \quad -\vec{AP} + \vec{AB} - \vec{AP} + \vec{AC} - \vec{AP} = \vec{AQ} - \vec{AP}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AP} + \vec{AQ}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{2\vec{AP} + \vec{AQ}}{3} = \vec{AG}$

これは GがPQを1:2に内分していることを示しているので、P, Q, Gは一直線上にある。

(3) $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OP} = \begin{pmatrix} 9-3x \\ 12-3y \\ 12 \end{pmatrix}$

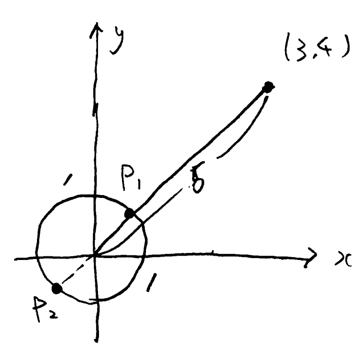
$$|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}| = \sqrt{9(3-x)^2 + 9(4-y)^2 + 12^2}$$

これは $x=3$, $y=4$ のとき最小値 12 となる。

このとき Pは $(3, 4, 0)$

(4) (3)より $|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}|$ は $(x-3)^2 + (y-4)^2$ が最大となるとき最大となり、最小となるとき最小となる

$(x-3)^2 + (y-4)^2$ は点$(3, 4)$と点(x, y)の距離の平方であり、(x, y)は単位円周上を動くので、$(3, 4)$と(x, y)の距離は右図より最小が4、最大が6。すなわち



$$4^2 \leq (x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 6^2$$

$$\sqrt{9 \times 4^2 + 12^2} \leq |\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}| \leq \sqrt{9 \times 6^2 + 12^2}$$

$$12\sqrt{2} \leqq |\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}| \leqq 6\sqrt{13}$$

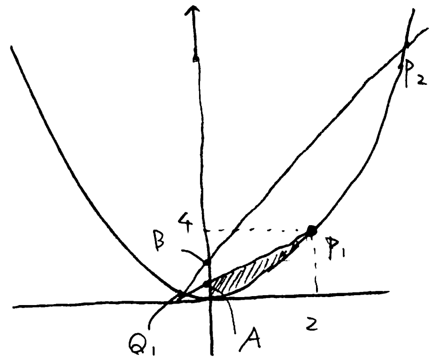
最小となるのは図中の $P_1\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ 最大となるのは $P_2\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$

以上をまとめて.

最大値は $6\sqrt{13}$, このときPは $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$

最小値は $12\sqrt{2}$ 〃 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$

⑤



(1) $y=ax+1$ と $y=x^2$ を連立

$$x^2-ax-1=0.$$

この方程式の2解が p, q となるが、解と係数の関係より

$$pq=-1$$

が成り立っている　　証明終

$p=2$ のとき $q=-\frac{1}{2}$ となるので、　$Q_1=\left(-\frac{1}{2},\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)=\underline{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}$

(2) (1)と同様に $y=bx+2$ と C の交点を $P(p, p^2)$、$Q(q, q^2)$ とすると

$$pq=-2 \quad \cdots (*)$$

が成り立つ.

$q=-\frac{1}{2}$ のとき $p=4$, だから　$\underline{P_2(4, 16)}$

$p=4$ のとき (1)より $q=-\frac{1}{4}$　$\underline{Q_2\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)}$

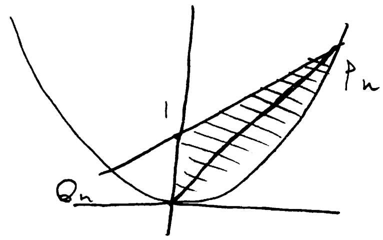
$q=-\frac{1}{4}$ のとき (*)より $p=8$　$\underline{P_3(8, 64)}$

(3)

$p_n q_n=-1$,　$p_{n+1}\times q_n=-2$ より　$p_{n+1}=2p_n$

$p_1=2$ だから　$p_n=2^n$, これを $p_n q_n=-1$ に代入して　$q_n=-\frac{1}{2^n}$

$$\underline{p_n=2^n,\ q_n=-\frac{1}{2^n}}$$

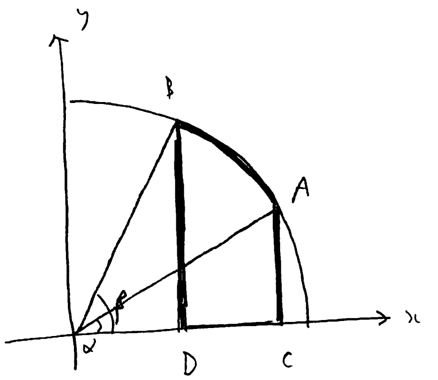


(4) $S_n=\frac{1}{6}(p_n-0)^3+\frac{1}{2}\times1\times p_n$

$=\frac{1}{6}\times2^{3n}+2^{n-1}=\underline{\frac{1}{3}\times2^{3n-1}+2^{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\times2^{3n+2}+2^n}{\frac{1}{3}\times2^{3n-1}+2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\times2^3+2^{-2n+1}}{\frac{1}{3}+2^{-2n}}=\underline{8}$$

⑥



(1) $\angle AOB = \beta - \alpha$

$$S_1 = \pi \times 1^2 \times \frac{\beta-\alpha}{2\pi} = \underline{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$ //

(2)

$$S_2 = S_1 + \triangle AOC - \triangle BOD$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta$$

$$= \underline{\frac{1}{2}(\beta-\alpha+\cos\alpha\sin\alpha-\cos\beta\sin\beta)}$$ //

(3) $S_2 = S_1$ のとき (1) (2) より.

$$\cos\alpha\sin\alpha = \cos\beta\sin\beta$$

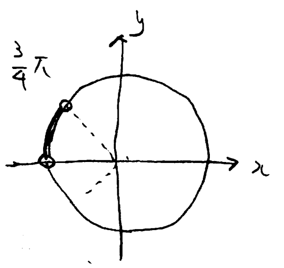
$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta$$

$$2\alpha = 2\beta + 2n\pi,\quad \pi - 2\beta + 2n\pi \qquad (n\text{は整数})$$

$$\alpha = \beta + n\pi,\quad \frac{\pi}{2} - \beta + n\pi$$

このうち. $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ を満たすのは $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ のみ.

$$\therefore\ \beta = \underline{\frac{\pi}{2} - \alpha}$$ //



このとき

$$t = \cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$= \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{3}{4}\pi\right)$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\alpha < \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ より $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

よって $0 < \sin\left(\alpha + \frac{3}{4}\pi\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$0 < \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{3}{4}\pi\right) < 1 \qquad \therefore\ \underline{0 < t < 1}$$ //

(4) $\triangle OBD$, $\triangle AOC$ を x 軸のまわりに回転させたものの体積を v_1, v_2 とすると

$$V_1 = V_2 + v_1 - v_2$$

となるので

$$V = V_1 - V_2 = v_1 - v_2$$

$$= \pi \times BD^2 \times OD \times \frac{1}{3} - \pi \times AC^2 \times O.C \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\pi \sin^2\beta \cos\beta - \frac{1}{3}\pi \sin^2\alpha \cos\alpha$$

$$= \frac{1}{3}\pi \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \frac{1}{3}\pi \sin^2\alpha \cos\alpha$$

$$= \frac{1}{3}\pi \sin\alpha\cos\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

ここで $t^2 = (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$ より $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1-t^2}{2}$

だから

$$V = \frac{1}{3}\pi \times \frac{1-t^2}{2} \times t = \underline{\frac{1}{6}\pi t(1-t^2)}$$

(5) $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{6}\pi(1-3t^2)$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{dV}{dt}$	/	$+$	0	$-$	/
V	/	↗		↘	/

増減は右のとおり

$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $V = \frac{1}{6}\pi \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{27}\pi$

$t = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{3}{4}\pi\right) = \cos\alpha - \sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sin\alpha$ を $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ に代入.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha + 2\sin^2\alpha = 1$$

$$2\sin^2\alpha + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha - \frac{2}{3} = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}}}{2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{15}}{6}$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ より $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6}$ このとき $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$

$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos\beta = \sin\alpha$ より

$A\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\right)$