① (1) 1, 2, 3, 4, 5 のうちから小さい3つを選んだ、1, 2, 3 の合計である 6が最小値、3, 4, 5を選んだ12が最大値。

1〜5までは連続した整数なので、3数の合計は6〜12までの全てであることは明らか。以上より 6〜12までの 7個

(2) 最小となるのは $(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (1, 2, \ldots, m)$ となったときで $\frac{1}{2}m(m+1)$。

最大となるのは $(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (n-m+1, n-m+2, \ldots, n)$ のときで、その合計は $\frac{1}{2}(n-m+1+n) \times m = \frac{1}{2}m(2n-m+1)$

ここで $\frac{1}{2}m(m+1) \leqq S < \frac{1}{2}m(2n-m+1)$ となる S に対して、$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = S$ となるような、$(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ が存在したと仮定する。このとき、$(a_1, a_2, \ldots, a_m) \neq \frac{1}{2}m(2n-m+1)$ なので、$(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ は $1 \sim n$ のうちの最大数の組みあわせではない。したがって、和を1つ増やすように $a_1 \sim a_m$ のうちの1つの数をそれより1つ大きな数とすることができる。

上記の事実を帰納的に用いると S は $\frac{1}{2}m(m+1) \sim \frac{1}{2}m(2n-m+1)$ となる全ての自然数となりえることが分かる。

よって $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ の形で表される自然数は $\frac{1}{2}m(m+1)$, $\frac{1}{2}m(m+1)+1, \ldots, \frac{1}{2}m(2n-m+1)$ で

$$\frac{1}{2}m(2n-m+1) - \frac{1}{2}m(m+1) + 1$$

$$= mn - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + 1$$

$$= mn - m^2 + 1$$ 個存在する

②　l は　$y = a(x-2)-2$

これと $y = x^2$ を連立すると

$$x^2 - ax + 2a + 2 = 0$$

この2次方程式が解をもたないとき、l と $y=x^2$ は交点をもたない。

判別式を D とすると

$$D = a^2 - 4(2a+2) < 0$$

$$a^2 - 8a - 8 < 0$$

$$4-2\sqrt{6} < a < 4+2\sqrt{6}$$

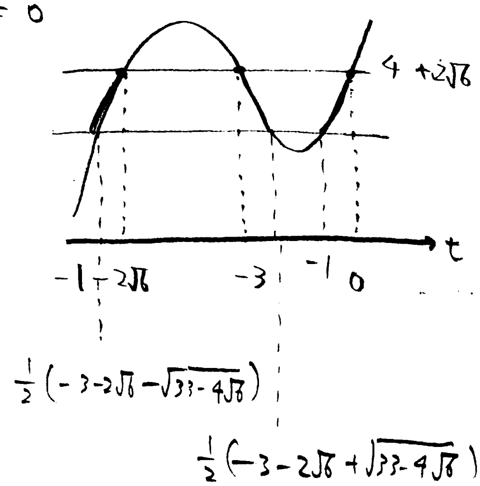
次に　$a = t^3 + 2(2+\sqrt{6})t^2 + 3(1+2\sqrt{6})t + 2(2+\sqrt{6}) = f(t)$ とおく

$f(t) = 4+2\sqrt{6}$　となるのは

$$t^3 + 2(2+\sqrt{6})t^2 + 3(1+2\sqrt{6})t = 0$$

$$t(t+3)(t+1+2\sqrt{6}) = 0$$

$$t = 0,\ -3,\ -1-2\sqrt{6}$$



$f(t) = 4-2\sqrt{6}$ となるのは

$$t^3 + 2(2+\sqrt{6})t^2 + 3(1+2\sqrt{6})t + 4\sqrt{6} = 0$$

$$(t+1)(t^2 + (3+2\sqrt{6})t + 4\sqrt{6}) = 0$$

$$t = -1,\ \frac{-3-2\sqrt{6} \pm \sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2}$$

よって　t の範囲はグラフより

$$\frac{1}{2}(-3-2\sqrt{6}-\sqrt{33-4\sqrt{6}}) < t < -1-2\sqrt{6}$$

$$,\ -3 < t < \frac{1}{2}(-3-2\sqrt{6}+\sqrt{33-4\sqrt{6}}),\ -1 < t < 0.$$

③ (1) $a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$

$\Leftrightarrow\quad a_{n+2}=(p+q)a_{n+1}-pq\,a_n$

これと $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ を比較して

$p+q=1,\quad pq=-6$

$\Leftrightarrow\quad (p,q)=(3,-2),\ (-2,3)$

よって漸化式は

$a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)\ \cdots ①$

または $a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)\ \cdots ②$

と表すことができ、①より

$a_{n+1}-3a_n=(-2)^{n-1}\times(a_2-3a_1)=(-2)^n\ \cdots ①'$

②より $a_{n+1}+2a_n=3^{n-1}\times(a_2+2a_1)=3^n\ \cdots ②'$

②'−①' $5a_n=3^n-(-2)^n$

$$a_n=\frac{1}{5}(3^n-(-2)^n)$$

(2) 左辺 $=a_{m+n+1}=\frac{1}{5}(3^{m+n+1}-(-2)^{m+n+1})$

右辺 $=a_{m+1}a_{n+1}+6a_ma_n$

$=\frac{1}{5}(3^{m+1}-(-2)^{m+1})\times\frac{1}{5}(3^{n+1}-(-2)^{n+1})$

$\quad+6\times\frac{1}{5}(3^m-(-2)^m)\times\frac{1}{5}(3^n-(-2)^n)$

$=\frac{1}{25}\Big(3^{m+n+2}-3^{m+1}(-2)^{n+1}-(-2)^{m+1}\cdot3^{n+1}+(-2)^{m+n+2}$

$\quad+6\times3^{m+n}-6\times3^m(-2)^n-6\times(-2)^m\cdot3^n+6\times(-2)^{m+n}\Big)$

$=\frac{1}{25}\Big(3\cdot3^{m+n+1}+2\cdot3^{m+n+1}-3^{m+1}(-2)^{n+1}+3^{m+1}(-2)^{n+1}-(-2)^{m+1}\cdot3^{n+1}$

$\quad+(-2)^{m+1}\cdot3^{n+1}-2(-2)^{m+n+1}-3(-2)^{m+n+1}\Big)$

$=\frac{1}{25}(5\cdot3^{m+n+1}-5\cdot(-2)^{m+n+1})$

$=\frac{1}{5}(3^{m+n+1}-(-2)^{m+n+1})=$ 左辺

証明終

(3) $m = m'n$ と表すとき $a_{m'n}$ が a_n で割りきれることを数学的帰納法によって示す.

(i) $m' = 1$ のとき

$a_{m'n} = a_n$ となり明らか.

(ii) $m' = k$ のとき

a_{kn} が a_n で割りきれると仮定する.

$n \geqq 2$ のとき (2) の結果で $m = kn - 1$ とすると

$$a_{kn-1+n+1} = a_{kn-1+1}\,a_{n+1} + 6\,a_{kn-1}\,a_n$$

$$a_{k(n+1)} = a_{kn}\,a_{n+1} + 6\,a_{kn-1}\,a_n$$

ここで $a_{kn}\,a_{n+1}$ は仮定より a_n で割りきれるので. 上式の右辺は a_n で割りきれる.

$n = 1$ のとき. $a_1 = 1$ となるので a_{kn} は a_1 で割りきれる

(i)(ii) より $a_{m'n}$ は a_n で割りきれ、題意が示された.

(4) $a_{12} = \frac{1}{5}(3^{12} - (-2)^{12})$

$= \frac{1}{5}(3^6 - (-2)^6)(3^6 + (-2)^6)$

$= \frac{1}{5}(3^3 - (-2)^3)(3^3 + (-2)^3)(3^2 + (-2)^2)(3^4 - 3^2(-2)^2 + (-2)^4)$

$= \frac{1}{5} \times 35 \times 19 \times 13 \times (81 - 36 + 16)$

$= 7 \times 19 \times 13 \times 61$

$= 7 \times 13 \times 19 \times 61$

④ (1) $\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}+\overline{\left(\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}\right)}=0$

$\Leftrightarrow\ (z-\alpha)(\overline{z-\beta})+(\overline{z-\alpha})(z-\beta)=0$

$\Leftrightarrow\ z\bar{z}-z\bar{\beta}-\alpha\bar{z}+\alpha\bar{\beta}+z\bar{z}-\bar{z}\beta-z\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta=0$

$\Leftrightarrow\ 2z\bar{z}-z(\bar{\alpha}+\bar{\beta})-\bar{z}(\alpha+\beta)+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta=0$

$\Leftrightarrow\ \left(z-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{2}(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\right)+\frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=0$

$\Leftrightarrow\ \left|z-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta\right|^2=\frac{1}{4}(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$

$\Leftrightarrow\ \left|z-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right|=\frac{1}{2}|\alpha-\beta|$

中心 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, 半径 $\frac{1}{2}|\alpha-\beta|$ の円

(2) $x^2-2x+4=0$ より $x=1\pm\sqrt{3}i$ $\therefore\ \alpha=1+\sqrt{3}i,\ \beta=1-\sqrt{3}i$

$\arg\dfrac{z-\alpha^2}{z-\beta^2}=\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{z-\alpha^2}{z-\beta^2}$ は純虚数なので (1) より z は

中心 $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$, 半径 $\frac{1}{2}|\alpha^2-\beta^2|$ の円周上にある

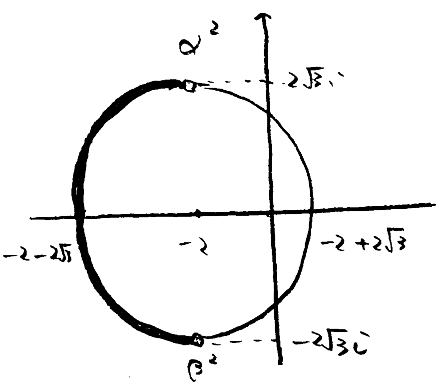
$\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2=\frac{1}{2}\left(1+2\sqrt{3}i-3+1-2\sqrt{3}i-3\right)=-2$

$\alpha^2-\beta^2=1+2\sqrt{3}i-3-1+2\sqrt{3}i+3=4\sqrt{3}i$

$\frac{1}{2}|\alpha^2-\beta^2|=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\alpha^2=-2+2\sqrt{3}i$, $\beta^2=-2-2\sqrt{3}i$

はよの円周上にあり



$\arg\dfrac{z-\alpha^2}{z-\beta^2}$

$=\arg(z-\alpha^2)-\arg(z-\beta^2)$

$=\dfrac{\pi}{2}$ より

$\arg(z-\alpha^2)=\arg(z-\beta^2)+\dfrac{\pi}{2}$

よって右上図の太線部が z の描く図形となる