① (1) 普通のサイコロ3回の目の積が奇数となる確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

したがって偶数となるのは $1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

奇数サイコロ2回の目の出方、およびその和(N)は次のようになる

	1	3	5
1	2	4	6
3	4	6	8
5	6	8	10

(列：2回目、行：1回目)

偶数サイコロの出方は

	2	4	6
2	4	6	8
4	6	8	10
6	8	10	12

(列：2回目、行：1回目)

以上より、N=10となる確率は

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}+\frac{7}{8}\times\frac{2}{9} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$$

(2) 1回目に1が出たとき、N=10となる確率をもとめる。

積が奇数となるのは $\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{1}{9} = \frac{1}{216}$

積が偶数と 〃 $\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}\right)\times\frac{2}{9} = \frac{1}{6}\times\frac{\cancel{3}}{4}\times\frac{\cancel{2}}{9} = \frac{1}{36}$

よって $\frac{1}{216}+\frac{1}{36} = \frac{7}{216}$

もとめる条件つき確率は

$$\frac{\frac{7}{216}}{\frac{5}{24}} = \frac{7\times\cancel{24}^{6}}{\cancel{216}_{\cancel{54}\ 9}\times5} = \frac{7}{45}$$

② (1) $${}_{2n}C_{2i-1} = \frac{(2n)!}{(2i-1)!(2n-2i+1)!} \quad \cdots ①$$

$${}_{2n-1}C_{2i-2} = \frac{(2n-1)!}{(2i-2)!(2n-2i+1)!} \quad \cdots ②$$

この式の左辺が整数なのは明らか

①,② より

$${}_{2n}C_{2i-1} = \frac{2n}{2i-1} \times {}_{2n-1}C_{2i-2}$$

また条件より、奇数の自然数 q を用いて $n = 2^r q$ と表せるので

$${}_{2n}C_{2i-1} = 2^{r+1} \underbrace{q \frac{{}_{2n-1}C_{2i-2}}{2i-1}}$$

左辺は整数なので 〰 部は整数。（∵ $2i-1$ は奇数）

よって ${}_{2n}C_{2i-1}$ は 2^{r+1} で割り切れる。

(2)

$$\begin{array}{rl} & (1+1)^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \\ -) & (1-1)^{2n} = {}_{2n}C_0 - {}_{2n}C_1 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \\ \hline & 2^{2n} - 0 = {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} \quad \cdots ③ \end{array}$$

${}_{2n}C_1 = 2n = 2^{r+1}q$ となるので、${}_{2n}C_1, {}_{2n}C_3 \cdots {}_{2n}C_{2n-1}$ の

最大公約数は $2^{r+1} \times u$ （u は奇数）となるが、その場合、

③式の右辺は u の倍数となる。しかし、2^{2n} は 1 以外の奇数を

素因数を持たないので $u = 1$

よって ${}_{2n}C_1, {}_{2n}C_3 \cdots\cdots {}_{2n}C_{2n-1}$ の最大公約数は 2^{r+1} である

③ $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=\omega$ とおくと題意の円に

$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \cdots \omega^{n-1}$ の表す複素数と対応付けることができるので、

P_0 を 1、P_1 を ω^1、$\cdots$ P_{n-1} を ω^{n-1} と対応付ける。

ここで $\omega^n=1$ より、$\omega^n-1=0 \Leftrightarrow (\omega-1)(\omega^{n-1}+\omega^{n-2}+\cdots+\omega+1)=0$ であり

$\omega\neq1$ は明らかなので $\omega^{n-1}+\omega^{n-2}+\cdots+\omega+1=0$.

この式の実部を比較することで

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}\times2+\cos\frac{2\pi}{n}\times3+\cdots+\cos\frac{2\pi}{n}\times(n-1)+1=0 \quad \cdots①$$

また

$$\overline{P_0P_1}^2+\overline{P_0P_2}^2+\overline{P_0P_3}^2+\cdots+\overline{P_0P_{n-1}}^2$$

$$=\left(1^2+1^2-2\cos\frac{2\pi}{n}\times1\right)+\left(1^2+1^2-2\cos\frac{2\pi}{n}\times2\right)+\cdots+\left(1^2+1^2-2\cos\frac{2\pi}{n}(n-1)\right) \quad (\because 余弦定理)$$

$$=2(n-1)-2\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}\times2+\cdots+\cos\frac{2\pi}{n}(n-1)\right)$$

$$=2n-2-2(-1) \quad (\because ①)$$

$$=2n.$$

全ての頂点について同様だから、

$$\overline{P_0P_1}^2+\overline{P_1P_2}^2+\overline{P_1P_3}^2+\cdots+\overline{P_1P_{n-1}}^2=2n$$

$$\overline{P_0P_2}^2+\overline{P_1P_2}^2+\overline{P_2P_3}^2+\cdots+\overline{P_2P_{n-1}}^2=2n$$

$$\vdots$$

これらを全て足し合わせると、同じ長さの2乗を2度ずつ足しているので

$$2\sum_{(i,j)\in S}\overline{P_iP_j}^2=2n\times n$$

$$\therefore \sum_{(i,j)\in S}\overline{P_iP_j}^2=n^2$$

④ (1) 数学的帰納法で示す

(i) $n=1$のとき

$f(ax) < af(x)$ で $x=\frac{x}{a}$とすれば $f(x) < af(a^{-1}x)$ となるので成り立つ。

(ii) $n=k$のとき

$f(x) < a^k f(a^{-k}x)$ が成り立つと仮定する。

$f(ax) < af(x)$ において、$x=\frac{x}{a^{k+1}}$ とすると、

$f(a^{-k}x) < af(a^{-(k+1)}x)$

仮定より $f(a^{-k}x) > \frac{1}{a^k}f(x)$ だから

$\frac{1}{a^k}f(x) < f(a^{-k}x) < af(a^{-(k+1)}x)$

$\Leftrightarrow$ $f(x) < a^{k+1}f(a^{-k-1}x)$

$n=k$のときに不等式が成り立てば $n=k+1$のときも成り立つ。

(i)(ii)より、全てのnについて $f(x) < a^n f(a^{-n}x)$ が成り立つことが示された。