①

(1) $x+y=p$, $xy=q$ とする。

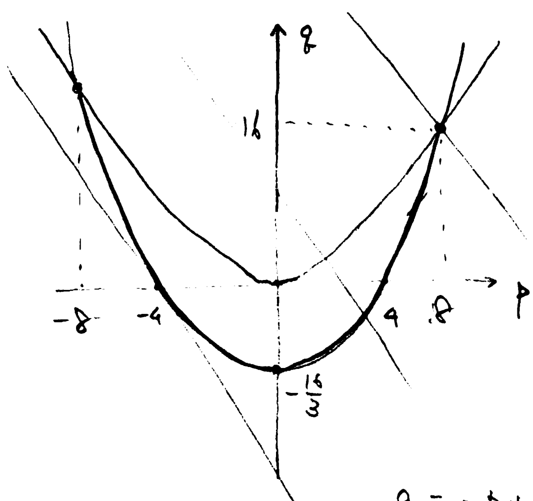
x, y を2解にもつ2次方程式の1つは $t^2-pt+q=0$

x, y が実数なので、判別式をDとし $D=p^2-4q \geqq 0$. $\Leftrightarrow$ $q \leqq \frac{1}{4}p^2$ …①

$x^2-xy+y^2=16$ $\Leftrightarrow$ $p^2-3q=16$ …②

$x+y+xy=k$ とすると、 $p+q=k$ …③

①かつ②のとき③を考える



$q=\frac{1}{4}p^2$ と $q=\frac{1}{3}p^2-\frac{16}{3}$ の交点は

$\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{3}p^2-\frac{16}{3}$

$p^2=16\times4$

$p=\pm8$

$q=-p+k$

①かつ②は図中太線部

$q=-p+k$ が、これと共有点を持つ中で、切片 k が最大となるのは

$(p, q)=(8, 16)$ のとき

$\therefore$ $p+q = \underline{x+y+xy = 24}$

①(2)

$x^2 = X$ とおくと. $x^{2010} = X^{1005}$

これを $x^4 - 1 = X^2 - 1$ で割った余りを考えればよい.

$$X^{1005} = (X^2 - 1)P(X) + aX + b$$

とおくと.

$X = 1$ のとき　$1 = a + b$

$X = -1$ 〃　$-1 = -a + b$

よって $a = 1$, $b = 0$　　よって余りは X となる.

以上により. x^{2010} を $x^4 - 1$ で割った余りは x^2 である.

$x = 3$ のとき　$\underline{9}$ //

① (3)

9の倍数は各位の数の和が9の倍数となることに注意する。

a, b, c, d の4つの1桁の数(0〜9)の和が9の倍数で

かつ $0=a<b<c<d$ となるものを書き出す

$(a,b,c,d) = (0,1,2,6), (0,1,3,5), (0,2,3,4)$

$(0,1,8,9), (0,2,7,9), (0,3,6,9)$

$(0,3,7,8), (0,4,5,9), (0,4,6,8)$

$(0,5,6,7)$

$10 \times 3 \times 3! = \underline{180}$

① (4)

$$(x-a)^2+(y-b)^2=25$$
$$-)\quad x^2+y^2=9$$
$$-2ax+a^2-2by+b^2=16.$$

これが. $2x+y+1=0$ となるので

$$-2a:-2b:a^2+b^2-16=2:1:1$$

$$\Leftrightarrow \quad a=2b.\quad a^2+b^2-16=-a$$

$$\Leftrightarrow \quad (a,b)=\left(\frac{16}{5},\frac{8}{5}\right)\quad (\because a>0)$$

よって $\underline{a+b=\frac{24}{5}}$ //

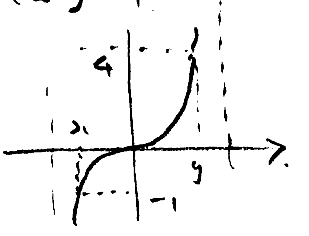
① (5) $\dfrac{1}{\cos^2(x+y)} = 1+\tan^2(x+y) = \dfrac{25}{16}$ より $\cos(x+y) = \pm\dfrac{4}{5}$.

ここで $\dfrac{3}{4} = \tan(x+y) = \dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y} = \dfrac{\frac{3}{2}}{1-\tan x\tan y}$

となるので $\tan x\tan y = -1$.

これと $\tan x+\tan y = \dfrac{3}{2}$ より $\tan x$, $\tan y$ は $t^2-\dfrac{3}{2}t-1=0$ の

2解であり. $-\dfrac{\pi}{2} < x < y < \dfrac{\pi}{2}$ より $\tan x=-\frac{1}{2}$, $\tan y = 2$



右のグラフより $x<0$, $y>0$

かつ $|x| < |y|$

となるので $x+y>0$.

$\therefore$ $\underline{\cos(x+y) = \dfrac{4}{5}}$

D (6).

$$f(x) = -2x + \frac{25}{2} + x^2\int_0^1 t^2 dt - 2x\int_0^1 te^t dt + \int_0^1 e^{2t} dt$$

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$

$$\int e^{2t} dt = \frac{1}{2}e^{2t} + C$$

となるので

$$f(x) = -2x + \frac{25}{2} + \frac{1}{3}x^2 - 2x\left[te^t - e^t\right]_0^1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3}x^2 - 2x + 12 + \frac{1}{2}e^2 - 2x$$

$$= \frac{1}{3}x^2 - 4x + 12 + \frac{1}{2}e^2$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x - 4$$

題意より $f'(a) = \frac{2}{3}a - 4 = 0$ $\quad a = 6$

$$f(6) = 12 - 24 + 12 + \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}e^2$$

$$\therefore\ am = 6 \times \frac{1}{2}e^2 = 3e^2$$

②

(1)

PS // QR

PQ // SR より

PQRSは平行四辺形

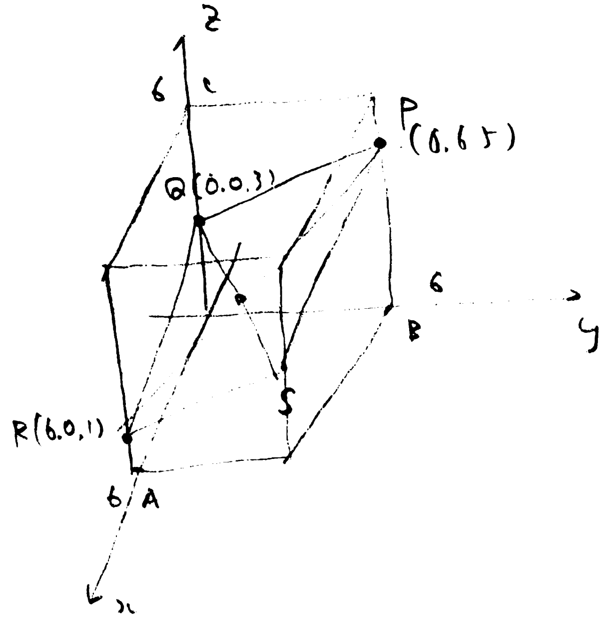
$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

$\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \therefore \underline{S(6.6.3)}$



(2) $\overrightarrow{PQ} = (0.\ -6.\ -2)$. $\overrightarrow{PS} = (6.\ 0.\ -2)$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$. $|\overrightarrow{PS}| = 2\sqrt{10}$.

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS} = 4.$ $\qquad \therefore \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PS}|} = \dfrac{4}{(2\sqrt{10})^2} = \underline{\dfrac{1}{10}}$

(3) $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt{99}}{10} = \dfrac{3\sqrt{11}}{10}$

$\therefore \quad |\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PS}|\sin\theta = 2\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} \times \dfrac{\sqrt{99}}{10} = \underline{12\sqrt{11}}$

(4). 単位ベクトルを (a. b. c) とすると

$\overrightarrow{PQ} \cdot (a.b.c) = -6b - 2c = 0. \iff b = -\frac{1}{3}c$

$\overrightarrow{PS} \cdot (a.b.c) = 6a - 2c = 0. \iff a = \frac{1}{3}c.$

$a : b : c = \frac{1}{3}c : -\frac{1}{3}c : c = 1 : -1 : 3$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ となるので $(a.b.c) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{11}}, \mp\frac{1}{\sqrt{11}}, \pm\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$

複号同順

(5) PQRSは平行四辺形なので、交点はP,Rの中点(3,3,3)

交点を通って単位ベクトルを方向ベクトルにもつ直線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

①の直線が、平面 $z=0$ と交わるので

$$0 = 3 + 3k$$

$$k = -1$$

$$\therefore (x, y, z) = \underline{(2, 4, 0)}$$

③

(1) Aは4人、Bは4人、となれば良い。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_8C_4=\frac{1}{2^8}\times\frac{\cancel{8}^{2}\times7\times\cancel{6}\times5}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}=\frac{35}{2^7}=\frac{35}{128}$$

(2) $|d_8|$が奇数になることはない。

$|d_8|=2$となるのは $\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_8C_5\times2=\frac{7}{16}$

$|d_8|=4$ 〃 $\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_8C_6\times2=\frac{7}{32}$

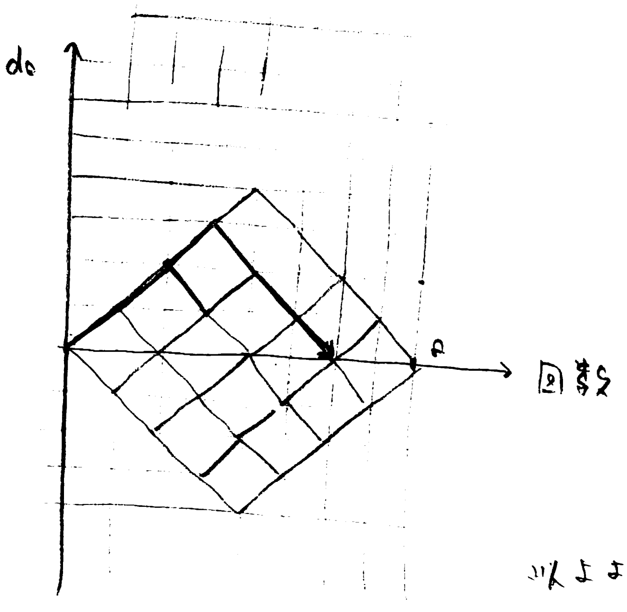
$|d_8|=6$ 〃 $\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_8C_7\times2=\frac{1}{16}$

$|d_8|=8$ 〃 $\left(\frac{1}{2}\right)^8\times2=\frac{1}{128}$

以上より $\frac{35}{128}\times0+\frac{7}{16}\times2+\frac{7}{32}\times4+\frac{1}{16}\times6+\frac{1}{128}\times8$

$=\frac{35}{16}$

(3)



n回目で初めて $d_n=0$ となる確率を P_n とする

$P_1=0$. $P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{1}{2}$

$P_3=0$. $P_4=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2$

$=\frac{1}{8}$

$P_5=0$

$P_6=\left(\frac{1}{2}\right)^6\times4=\frac{1}{16}$

以上より もとめる確率Pは

$$P=P_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\times{}_6C_3+P_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4C_2+P_6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_2C_1=\frac{15}{64}$$

(4) $a_8 = 0$ となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 \times {}_8C_4 = \frac{35}{128}$$

(3) より、途中、少なくとも1回は $a_5 = 0$ となるのは $\frac{15}{64}$ なので、

$$\frac{35}{128} - \frac{15}{64} = \frac{5}{128}$$