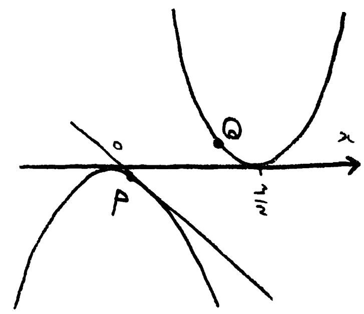
① (1) $C_1 : y = -x^2 = f(x)$, $C_2 : y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} = (x - \frac{3}{2})^2 = g(x)$

とおく

$f'(x) = -2x$ より $P(p, -p^2)$ における C_1 の接線は



$y = -2p(x-p) - p^2$

$\Leftrightarrow \quad y = -2px + p^2$

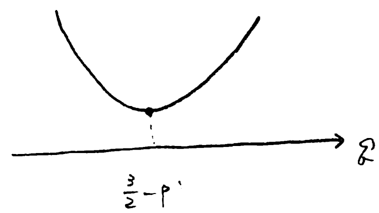
(2) $l : 2px + y - p^2 = 0$ と $Q(q, q^2 - 3q + \frac{9}{4})$

とのきょりは

$$d = \frac{\left|2pq + q^2 - 3q + \frac{9}{4} - p^2\right|}{\sqrt{(2p)^2 + 1^2}} = \frac{\left|q^2 + 2pq - 3q - p^2 + \frac{9}{4}\right|}{\sqrt{4p^2+1}}$$

(3) $q^2 + 2pq - 3q - p^2 + \frac{9}{4}$

$= (q + \frac{2p-3}{2})^2 - \frac{4p^2 - 12p + 9}{4} - p^2 + \frac{9}{4}$



$= (q + (p - \frac{3}{2}))^2 - 2p^2 + 12p$

$= (q - (\frac{3}{2} - p))^2 - 2(p-3)^2 + 18 \quad \cdots ①$

ここで $-2(p-3)^2 + 18$ は $0 \leqq p \leqq \frac{3}{2}$ のとき、

$p = 0, \frac{3}{2}$ のとき最小値 0 となるので ① は負にはならない。

よって $d = \dfrac{\{q - (\frac{3}{2} - p)\}^2 - 2(p-3)^2 + 18}{\sqrt{4p^2+1}}$ となり、

d は $q = \frac{3}{2} - p$ のとき最小値 $\dfrac{18 - 2(p-3)^2}{\sqrt{4p^2+1}}$ となる //

② (1) $f_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく.　$f_1(0) = d = 0$

条件より. $f_2(x) = f_1(x+1) - f_1(x) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) - ax^3 - bx^2 - cx$

$= 3ax^2 + 3ax + a + 2bx + b + c$

$= 3ax^2 + (3a+2b)x + a + b + c$

$f_2(0) = a+b+c = 0$ より $c = -a-b$. となるので $f_2(x) = 3ax^2 + (3a+2b)x$

$f_3(x) = f_2(x+1) - f_2(x) = 3a(x+1)^2 + (3a+2b)(x+1) - 3ax^2 - (3a+2b)x$

$= 6ax + 3a + 3a + 2b$

$f_3(0) = 0$ より. $6a + 2b = 0$.　$b = -3a$.　$\therefore f_3(x) = 6ax$.

$f_4(x) = f_3(x+1) - f_3(x) = 6a(x+1) - 6ax = 6a$

$f_4(0) = 6$ より $a = 1$.　このとき $b = -3$, $c = -1+3 = 2$.

$\therefore (a, b, c, d) = (1, -3, 2, 0)$.

$\underline{f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2x}$ //

(2) $f_1(x) = \sin\frac{\pi x}{3}$ のとき

$f_2(x) = f_1(x+1) - f_1(x)$

$= \sin\frac{\pi(x+1)}{3} - \sin\frac{\pi x}{3}$

$f_3(x) = f_2(x+1) - f_2(x)$

$= \sin\frac{\pi(x+2)}{3} - \sin\frac{\pi(x+1)}{3} - \sin\frac{\pi(x+1)}{3} + \sin\frac{\pi x}{3}$

$= \left\{\sin\frac{\pi(x+2)}{3} + \sin\frac{\pi x}{3}\right\} - 2\sin\frac{\pi(x+1)}{3}$

$= 2\sin\frac{\pi(x+1)}{3}\cos\frac{1}{3}\pi - 2\sin\frac{\pi(x+1)}{3}$

$= -\sin\frac{\pi(x+1)}{3}$

$= -f_1(x+1)$.　　証明終

③ (1) $PA+PB=4$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-3+\sqrt{3})^2}=4$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3-\sqrt{3})^2}=4-\sqrt{(x-2)^2+(y-3+\sqrt{3})^2}$$

両辺2乗 $$(x-2)^2+(y-3-\sqrt{3})^2=16-8\sqrt{(x-2)^2+(y-3+\sqrt{3})^2}+(x-2)^2+(y-3+\sqrt{3})^2$$

$$16=-4\sqrt{3}y+12\sqrt{3}+8\sqrt{(x-2)^2+(y-3+\sqrt{3})^2}$$

$$4+\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=2\sqrt{(x-2)^2+(y-3+\sqrt{3})^2}$$

両辺2乗 $$16+3y^2+27+8\sqrt{3}y-24\sqrt{3}-18y=(x^2-4x+4+y^2+9+3-6y+2\sqrt{3}y-6\sqrt{3})\times 4$$

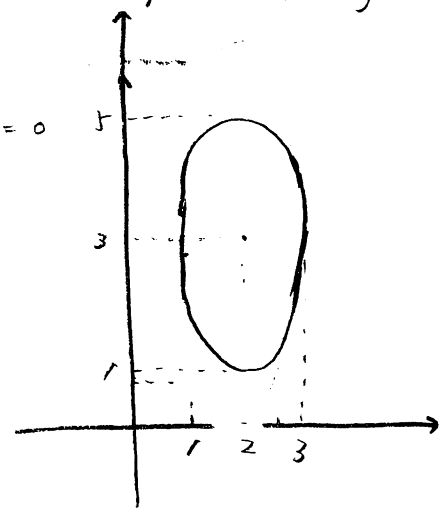
$$4x^2-16x+16+y^2-6y+5=0$$

$$4(x-2)^2+(y-3)^2+21-16-9=0$$

$$(x-2)^2+\frac{(y-3)^2}{4}=1$$

これは長軸半径2、短軸半径1、

中心$(2,3)$のだ円を表している



(2) $(x-2)^2=\cos^2\theta$, $\frac{(y-3)^2}{4}=\sin^2\theta$ とすると

$$\begin{cases} x=\cos\theta+2 \\ y=2\sin\theta+3 \end{cases}$$

(3) $$4x^2+y^2=4(\cos\theta+2)^2+(2\sin\theta+3)^2$$

$$=16\cos\theta+12\sin\theta+29$$

$$=20\sin(\theta+\alpha)+29$$ ただし、αは $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ を満たすものとする

θは任意の角度をとりうるので $-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$

よって $$20\times(-1)+29\leqq 4x^2+y^2\leqq 20\times 1+29$$

$$9\leqq 4x^2+y^2\leqq 49$$

(4) $\frac{y}{x}$は、だ円上の点と原点を結ぶ直線の傾きを表している。

だ円上の点 $(\cos\theta+2, 2\sin\theta+3)$ における接線は

$$\cos\theta(x-2) + \frac{2\sin\theta(y-3)}{4} = 1$$

これが原点を通るとき $(x, y) = (0, 0)$ となるので.

$$-2\cos\theta - \frac{3}{2}\sin\theta = 1$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sin\theta$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ に代入.

$$\therefore \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sin\theta + \frac{9}{16}\sin^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{-6 \pm 4\sqrt{21}}{25}$$

このとき $\cos\theta = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{6 \mp 4\sqrt{21}}{25} = \frac{-16 \mp 6\sqrt{21}}{50} = \frac{-8 \mp 3\sqrt{21}}{25}$

$$(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{-8 \mp 3\sqrt{21}}{25}, \frac{-6 \pm 4\sqrt{21}}{25}\right)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2\sin\theta + 3}{\cos\theta + 2} = \frac{50\sin\theta + 75}{25\cos\theta + 50} = \frac{-12 \pm 8\sqrt{21} + 75}{-8 \mp 3\sqrt{21} + 50} = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{3}$$

よって $\underline{\frac{6 - \sqrt{21}}{3} \leqq \frac{y}{x} \leqq \frac{6 + \sqrt{21}}{3}}$

④ $A(x)=\int_0^x (a\sin t+b\cos t)^2\,dt$

(1) $A(x)=\int_0^x a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t+2ab\sin t\cos t\,dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^x a^2(1-\cos 2t)+b^2(1+\cos 2t)+2ab\sin 2t\,dt$

$=\frac{1}{2}\left[(a^2+b^2)t+\frac{b^2-a^2}{2}\sin 2t-ab\cos 2t\right]_0^x$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)x+\frac{b^2-a^2}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}ab\cos 2x+\frac{1}{2}ab$

$\frac{A(x)}{x}=\frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{b^2-a^2}{2}\times\frac{\sin 2x}{2x}+\frac{ab(1-\cos 2x)}{2x}$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{b^2-a^2}{2}\times\frac{\sin 2x}{2x}+\frac{ab\sin 2x}{2x\cdot(1+\cos 2x)}\times\sin 2x$

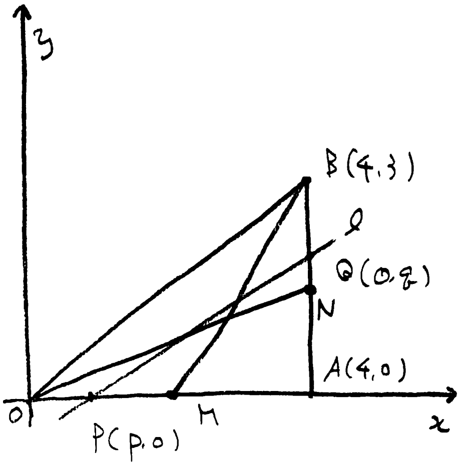
$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{x}=\frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{b^2-a^2}{2}+0=\underline{b^2}$

(2) $\frac{A(x)}{x}=\frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{1}{4x}\left(\underline{(b^2-a^2)\sin 2x+2ab(1-\cos 2x)}\right)$

〰部は -1〜1までの値なので

$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}=\underline{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$

⑤ (1) $Q(0, q)$ とする.



$\triangle PAQ = \frac{1}{2}\triangle OAB$ より

$\frac{1}{2} \times (4-p) \times q = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2}$

$0 \leqq p \leqq 2$ なので $\underline{q = \dfrac{6}{4-p}}$

このとき, l は

$y = \dfrac{q}{4-p}(x-p)$ より

$$\underline{y = \frac{6}{(4-p)^2}x - \frac{6p}{(4-p)^2}}$$

(2) $z = \dfrac{6r}{(4-p)^2} - \dfrac{6p}{(4-p)^2} = \dfrac{6(r-p)}{(4-p)^2}$

$$\frac{dz}{dp} = \frac{-6(4-p)^2 + 2(4-p) \times 6(r-p)}{(4-p)^4} = \frac{-24+6p+12r-12p}{(4-p)^3} = \frac{6(2r-4-p)}{(4-p)^3}$$

(3) $\dfrac{dz}{dp} = 0$ となるのは $p = 2r-4$ のときで. $2 \leqq r \leqq 3$ より $0 \leqq 2r-4 \leqq 2$

となるので, これは p の範囲 $0 \leqq p \leqq 2$ に含まれている.

したがって. z の増減は下のようになる

p	0	$\cdots$	$2r-4$	$\cdots$	2
$\frac{dz}{dp}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
z	$\frac{3}{8}r$	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{3}{2}(r-2)$

$p = 2r-4$ のとき

$z = \dfrac{3}{8-2r}$

$\frac{3}{8}r \geqq \frac{3}{2}(r-2)$ となるのは $r \leqq \frac{8}{3}$

z は必ず正であるので $\frac{3}{2}(r-2) \geqq 0$ となるのは. $r \geqq 2$.

以上より.

$$\begin{cases} 0 \leqq r \leqq 2 \text{ のとき} & 0 \leqq z \leqq \dfrac{3}{8-2r} \\ 2 \leqq r \leqq \dfrac{8}{3} \text{ のとき} & \dfrac{3}{2}(r-2) \leqq z \leqq \dfrac{3}{8-2r} \\ \dfrac{8}{3} \leqq r \leqq 4 \text{ のとき} & \dfrac{3}{8}r \leqq z \leqq \dfrac{3}{8-2r} \end{cases}$$