1

(1) 1~2017のうちの3の倍数　$2017 \div 3 = 672 \cdots 1$ より　672個

〃　4　〃　$2017 \div 4 = 504 \cdots 1$ より　504個

〃　12　〃　$2017 \div 12 = 168 \cdots 1$ より　168個

1~999のうちの3の倍数　$999 \div 3 = 333$ より　333個

〃　4　〃　$999 \div 4 = 249 \cdots 3$ より　249個

〃　12　〃　$999 \div 12 = 83 \cdots 3$ より　83個

1000~2017のうちの3の倍数　$672 - 333 = 339$ 個

〃　4　〃　$504 - 249 = 255$ 個

〃　12　〃　$168 - 83 = 85$ 個

以上より

1000~2017までの4桁の数のうち、3と4の少なくとも一方でわりきれる数の個数は

$$339 + 255 - 85 = 509$$

509個

(2) (i) 千の位が1のとき、

もう1種の数の選び方は9通り。

百、十、一の位は1またはもう一方の数なので 2^3 通り、ただし全て1は不適なので除くと $2^3 - 1 = 7$ 通り。

よって　$9 \times 7 = 63$ 通り。

(ii) 千の位が2のとき、

百の位は必ず0となる。

2017以下で2と0のみの2種から成るものは

2000, 2002,

の2通り。

(i)(ii)より　$63 + 2 = 65$

65通り

(3)

(i) 千の位が1のとき、

百、十、一の位は0, 2~9の9種の数から3つを選んで並べることになるので

$${}_9P_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

(ii) 千の位が2のとき

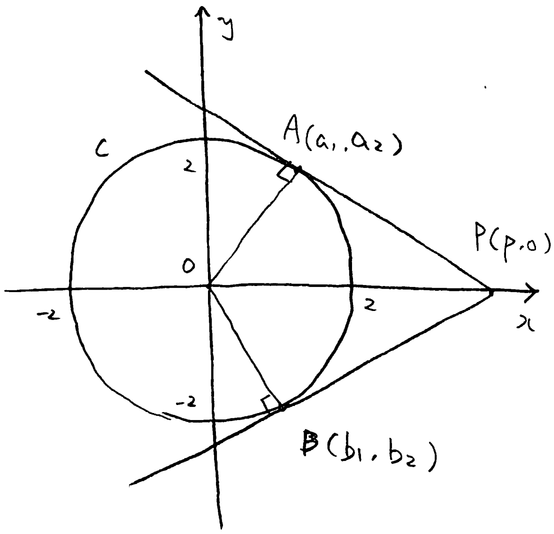
百の位は必ず0、十の位は必ず1になる。

このとき一の位は、3〜7の5通り考えられる

(i)(ii)より $504+5=509$

509通り。

2



(1) 円周上の点 (x_1, y_1) における接線は

$$x_1x + y_1y = 4$$

これが P を通るとき

$$x_1p = 4 \quad \cdots ①$$

(x_1, y_1) は円周上にあるので

$$x_1^2 + y_1^2 = 4 \quad \cdots ②$$

① より $x_1 = \frac{4}{p}$ を ② に代入.

$$y_1^2 = 4 - \frac{4^2}{p^2} \iff y_1 = \pm\frac{2\sqrt{p^2-4}}{p}$$

以上より

$$A(a_1, a_2) = \left(\frac{4}{p}, \frac{2\sqrt{p^2-4}}{p}\right)$$

$$B(b_1, b_2) = \left(\frac{4}{p}, -\frac{2\sqrt{p^2-4}}{p}\right)$$

(2)

$$\frac{1}{3}\left(\frac{4}{p} + \frac{4}{p} + p\right) = \frac{8+p^2}{3p}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{p^2-4}}{p} - \frac{2\sqrt{p^2-4}}{p} + 0\right) = 0.$$

$$G\left(\frac{8+p^2}{3p}, 0\right)$$

(3) G と O との距離が 2 となればよいので

$$\frac{8+p^2}{3p} = 2 \iff p^2 - 6p + 8 = 0 \iff p = 2, 4$$

$p > 2$ だから $p = 4$ となるが、このとき $OA = 2$, $OP = 4$ $\angle OAP = 90^\circ$

だから $\angle APO = 30^\circ$.

よって $\angle APB = 60^\circ$

(4) $OG = \dfrac{8+p^2}{3p} = \dfrac{8}{3p} + \dfrac{p}{3} \geqq 2\sqrt{\dfrac{8}{3p} \times \dfrac{p}{3}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

等号は $\dfrac{8}{3p} = \dfrac{p}{3}$ のとき、すなわち、$p = 2\sqrt{2}$ のとき.

dの最小値は $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, そのときの p は $2\sqrt{2}$

3

(1) $a_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^2}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

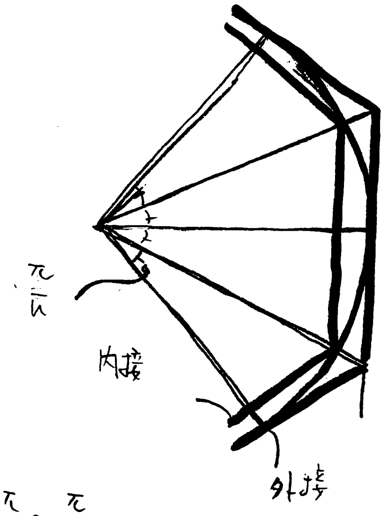
証明終

(2)

内接正n角形は

頂角 $\frac{\pi}{n}\times 2$，2辺の長さ1の二等辺三角形が

n個で構成されているので



$I_n = \frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin\frac{2\pi}{n} \times n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$

外接正n角形は．2辺の長さが $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$，その

間の頂角が $\frac{\pi}{n}\times 2$ の二等辺三角形n個で

構成されているので．

$E_n = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^2\times\sin\frac{2\pi}{n}\times n = \frac{n}{2}\times\frac{2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$

$= n\tan\frac{\pi}{n}$

$I_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$，$E_n = n\tan\frac{\pi}{n}$

(3) $\frac{\pi}{3\cdot 2^m} = \theta$ とおく．

$a_m = \cos\theta$，より $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-a_m^2}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{ だから } \sin\theta>0\right)$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-a_m^2}}{a_m}$

(4). $E_n > \pi$ において $n=3\cdot 2^m$ とすると．

$E_{3\cdot 2^m} > \pi \iff 3\cdot 2^m\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^m} > \pi \iff 3\cdot 2^m\cdot\frac{\sqrt{1-a_m^2}}{a_m} > \pi$

$I_n < \pi$ において　$n = 3\cdot 2^{m+1}$ とすると

$$\frac{3\cdot 2^{m+1}}{2}\sin\frac{2\pi}{3\cdot 2^{m+1}} < \pi \iff 3\cdot 2^m\sqrt{1-a_m^2} < \pi.$$

よって題意の不等式は成立する.

(5). (4) で $m=2$ とすると.

$$3\cdot 2^2\sqrt{1-a_2^2} < \pi < 3\cdot 2^2\frac{\sqrt{1-a_2^2}}{a_2}$$

$$\iff 3\cdot\cancel{2^2}\,\frac{\sqrt6-\sqrt2}{\cancel{4}} < \pi < 3\cdot 2^2\,\frac{\frac{\sqrt6-\sqrt2}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{\cancel{4}}}$$

$$\iff 3(\sqrt6-\sqrt2) < \pi < 12\times\frac{6-4\sqrt3+2}{6-2} = 12(2-\sqrt3).$$

よって題意の不等式は成立する.

$\boxed{4}$

(1) $I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x}|\sin x|dx = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\, dx$

ここで

$$(e^{-x}\sin x)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$$

$$(e^{-x}\cos x)' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$$

より.

$$e^{-x}\sin x = -\frac{1}{2}\left(e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x\right)'$$

となるので

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x)'dx = -\frac{1}{2}\Big[e^{-x}(\sin x + \cos x)\Big]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-\pi}(0-1) + \frac{1}{2}e^{0}(0+1) = \underline{\frac{1}{2}e^{-\pi} + \frac{1}{2}}$$

(2) $x-(n-1)\pi = t$ とすると. $\frac{dt}{dx} = 1$,

x	$(n-1)\pi \to n\pi$
t	$0 \to \pi$

となるので

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-t-(n-1)\pi}\left|\sin\left(t+(n-1)\pi\right)\right|dt$$

$$= e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}|\sin t|dt = e^{-(n-1)\pi}I_1 = \underline{\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})e^{-(n-1)\pi}}$$

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 \times \frac{1-(e^{-\pi})^n}{1-e^{-\pi}} = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}$

$$= \underline{\frac{1}{2}(1-e^{-n\pi}) \times \frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}}$$

(4) $0 < e^{-\pi} < 1$ だから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\times(1-0)\times\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1} = \underline{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}$$

$\boxed{5}$

(1) $|a| = \left|\frac{i}{2}\right| = \underline{\frac{1}{2}}$, $\arg a = \underline{\frac{\pi}{2}}$

(2)

$z_{n+1} + b = a(z_n + b)$ より $z_{n+1} = az_n + ab - b$.

これを $z_{n+1} = a(z_n + 1)$ と比較して.

$ab - b = a$.

$b = \frac{a}{a-1} = \frac{a(\bar{a}-1)}{|a-1|^2} = \frac{\frac{i}{2}\left(-\frac{i}{2}-1\right)}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{5}i\left(-\frac{i}{2}-1\right) = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

(3).

$z_n + b = a(z_{n-1} + b) = a \times a(z_{n-2} + b) = \cdots = a^{n-1}(z_1 + b)$

$z_n = a^{n-1}(1 + b) - b$

$= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

$= \frac{6}{5}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{5}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} i - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

nが偶数のとき $\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}$ は虚数になるので.

$x_n = -\frac{2}{5}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} i - \frac{1}{5}$, $y_n = \frac{6}{5i}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

nが奇数のとき.

$x_n = \frac{6}{5}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{5}$, $y_n = -\frac{2}{5}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

(4) $\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \longrightarrow 0$ となるので.

$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = -\frac{1}{5}$, $\lim_{n\to\infty} y_{2n} = +\frac{2}{5}$

$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = -\frac{1}{5}$, $\lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = +\frac{2}{5}$

$\therefore \underline{\lim_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{5}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\frac{2}{5}}$