① (1) $|\vec{p}|^2 = (1-t)^2|\vec{OA}|^2 + 2t(1-t)\vec{OA}\cdot\vec{OB} + t^2|\vec{OB}|^2$

$= 1-2t+t^2+t^2 = 2t^2-2t+1$ $\quad\therefore\ |\vec{p}| = \sqrt{2t^2-2t+1}$

$|\vec{q}|^2 = (1-s)^2\times 2 + 2s(1-s)\vec{OC}\cdot\vec{OD} + s^2\times 2$

$= 2-4s+2s^2+2s^2$ $\quad\therefore\ |\vec{q}| = \sqrt{4s^2-4s+2}$

$\vec{p}\cdot\vec{q} = (1-t)(1-s)\vec{OA}\cdot\vec{OC} + (1-t)s\vec{OA}\cdot\vec{OD} + t(1-s)\vec{OB}\cdot\vec{OC} + ts\vec{OB}\cdot\vec{OD}$

$= 0+0-t(1-s)-ts = -t$ $\quad\therefore\ \vec{p}\cdot\vec{q} = -t$

(2) $\cos\frac{3}{4}\pi = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$ に (1)の結果および $t=\frac{1}{2}$ を代入

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{4s^2-4s+2}}$ $\Leftrightarrow 4s^2-4s+2=1 \Leftrightarrow (2s-1)^2=0 \Leftrightarrow \underline{s=\frac{1}{2}}$

(3) $|\vec{p}-\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$

$= 2t^2\cancel{-2t}+1+\cancel{2t}+4s^2-4s+2 = 4s^2-4s+2t^2+3$

$= 4(s-\frac{1}{2})^2+2t^2+2$

$s=\frac{1}{2}$, $t=0$ のとき最小となり $|\vec{p}-\vec{q}| = \sqrt{2}$

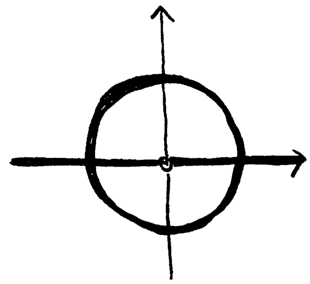
② (1) $z+\frac{4}{z}=\overline{\left(z+\frac{4}{z}\right)}$

⇔ $z-\bar{z}+\frac{4}{z}-\frac{4}{\bar{z}}=0$ ⇔ $z-\bar{z}+\frac{4}{|z|^2}(\bar{z}-z)=0$

⇔ $(z-\bar{z})\left(1-\frac{4}{|z|^2}\right)=0$.

⇔ $z=\bar{z}$ または $|z|^2=4$ $(z\neq 0)$

⇔ $z=\bar{z}$ または $|z|=2$ $(z\neq 0)$



zは実数または原点を中心とした半径2の円周上の点（原点除く）だから右図太線部

(2) (1)より、zは0を除く実数または$|z|=2$を満たす複素数

(i) zが実数のとき

$k\left(z+\frac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\frac{4}{z}\right)$

の左辺は必ず実数だから、上式が成り立つのは、実数zが $z+\frac{4}{z}+8=0$ と $z-\frac{4}{z}=0$ を同時に満たすときに限られる

$z-\frac{4}{z}=0$ より $z=\pm 2$、であるが、これらは $z+\frac{4}{z}+8=0$ を満たさない

よって、zが実数のとき、方程式 $k\left(z+\frac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\frac{4}{z}\right)$ は成立しない。

(ii) $|z|=2$のとき、

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表すことができる。

このとき方程式は

$$k\left(2\cos\theta+2i\sin\theta+2\cos(-\theta)+2i\sin(-\theta)+8\right)=i\left(2\cos\theta+2i\sin\theta-2\cos(-\theta)-2i\sin(-\theta)\right)$$

$$k(4\cos\theta+8)=i\times 4i\sin\theta$$

$$4k\cos\theta+8k+4\sin\theta=0$$

$\cos\theta=X$、$\sin\theta=Y$ とおくと、 $kX+Y+2k=0$ …① 、 $X^2+Y^2=1$ …②

となる。zが存在するのは上式を同時に満たす(X,Y)が存在することで、①の直線と②の円の中心との距離が半径の1よりも小さい（または等しい）ときである。

$\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1^2}}\le 1$　　$-\frac{1}{\sqrt{3}}\le k\le\frac{1}{\sqrt{3}}$

③ (1) $1000a+100b+10c+d$

$=(9\times111+1)a+(9\times11+1)b+(9\times1+1)c+d$

$=9\times(111a+11b+c)+a+b+c+d.$

よって $1000a+100b+10c+d$ が9の倍数ならば $a+b+c+d$ は9の倍数であり、

逆に $a+b+c+d$ が9の倍数ならば、$1000a+100b+10c+d$ も9の倍数。

つまり、$1000a+100b+10c+d$ が9の倍数であることは $a+b+c+d$ が9の倍数であることと同値である。

(2) 0、0、1、1、2、2、8、8 から4枚をえらんで

和が9になるのは 8, 1, 0, 0.

18 〃 8, 8, 1, 1 , 8, 8, 2, 0.

カードのとり方は

8, 1, 0, 0 → $2\times2\times{}_2C_2=4$

8, 8, 1, 1 → ${}_2C_2\times{}_2C_2=1$

8, 8, 2, 0 → ${}_2C_2\times2\times2=4$

∴ $\frac{4+1+4}{{}_8C_4}=\frac{\cancel{4\cdot3\cdot2}\cdot9}{{}_2\cancel{8}\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5}=\frac{9}{70}$

(3) 4つの数を並べる (各数は

8, 1, 0, 0 $\quad {}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_2\times1\times3!=24$

8, 8, 1, 1 $\quad {}_2C_2\times{}_2C_2\times2\times3!=12$

8, 8, 2, 0 $\quad 0$

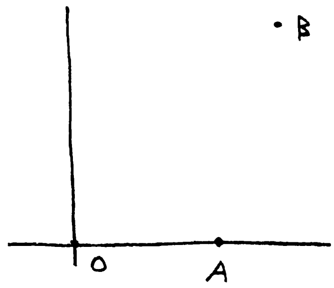
9の倍数は $(4+1+4)\times4!=9\times24$

9の倍数で偶数 $9\times24-(12+24)=180$

nが偶数になるのは $6\times7\times6\times5$ 通りだから。

$\frac{\cancel{180}\ 6}{\cancel{6\cdot7\cdot6\cdot5}}=\frac{1}{7}$

④ (1) $BQ \geqq OQ$



$(11-x)^2+(11-y)^2 \geqq x^2+y^2$

$242-22x-22y \geqq 0$

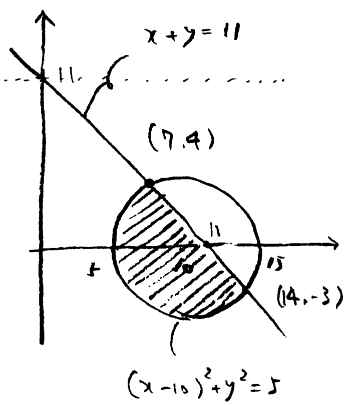
$x+y-11 \leqq 0 \quad \cdots ①$

$OQ \geqq 2AQ$

$x^2+y^2 \geqq 4\left(\frac{15}{2}-x\right)^2+4y^2$

$3x^2-60x+225+3y^2 \leqq 0$

$(x-10)^2+y^2 \leqq 25 \quad \cdots ②$



上図斜線部(境界含む)

①と②の等号が同時に成立するとき

$x+y=11$ と $(x-10)^2+y^2=25$ の

交点は $(1-y)^2+y^2=25$

$\cancel{2}y^2-\cancel{2}y-\cancel{24}^{12}=0$

$(y-4)(y+3)=0$

$y=4,\ -3$

$(x,y)=(7,4),\ (14,-3)$

$BQ=OQ=2AP$ となるQは

$(7,4),\ (14,-3)$

(2) $OQ \geqq PQ$

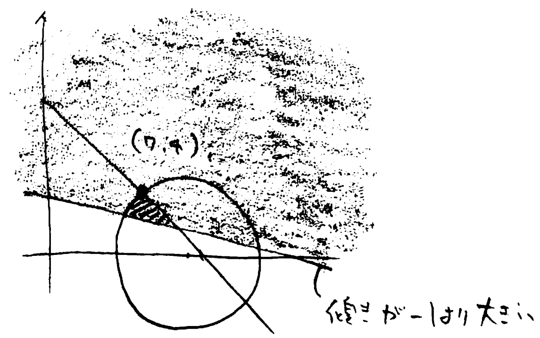
$x^2+y^2 \geqq (x-p)^2+(y-11)^2$

$2xp-p^2+22y-121 \geqq 0$

$px+11y-\frac{1}{2}p^2-\frac{121}{2} \geqq 0$

$y \geqq -\frac{p}{11}x+\frac{1}{22}p^2+\frac{11}{2}$

$0<p \leqq 11$ より $\quad -1 \leqq -\frac{p}{11} < 0$



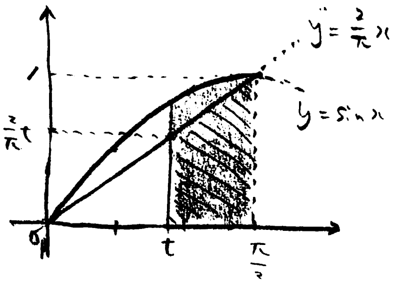
$y \geqq -\frac{p}{11}x+\frac{1}{22}p^2+\frac{11}{2}$ に $(7,4)$ が含まれればよいので

$4 \geqq -\frac{7}{11}p+\frac{1}{22}p^2+\frac{11}{2}$

$p^2-14p+33 \leqq 0 \iff (p-3)(p-11) \leqq 0 \qquad \therefore\ \underline{3 \leqq p \leqq 11}$

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ における

⑤ (1) $y=\sin x$, $y=\frac{2}{\pi}x$ のグラフは次のようになる



$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において $y=\sin x$ は上に凸だから、グラフより

$\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x$.

(2) $0<t<\frac{\pi}{2}$ を満たす t を考える

(1)のグラフで 黒ぬり部 ≧ 斜線部 だから

$$\int_t^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}t+1\right)\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$\cos t \geqq \frac{\pi}{4}-\frac{t^2}{\pi} \quad \cdots ①$$

そこで $g(x) \leqq \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{\pi}$ を示す.

上式は $\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{\pi}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2} \leqq \frac{3}{4}\pi-\frac{x^2}{\pi}$

右辺は面積 $+\frac{\pi}{2}$ だから必ず正だから 2乗して

$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{2}-x^2 \leqq \frac{9}{16}\pi^2-\frac{3}{2}x^2+\frac{x^4}{\pi^2}$

$\Leftrightarrow \frac{x^4}{\pi^2}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}\pi^2 \geqq 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{\pi}-\frac{\pi}{4}\right)^2 \geqq 0$

これは必ず成立する. よって $g(x) \leqq \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{\pi}$ が成立し.

これと①より $g(x) \leqq f(x)$ が示された.

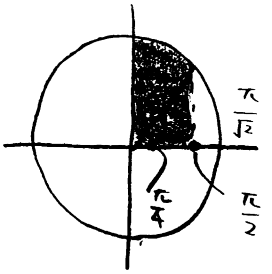
(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-g(x)|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x-\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}+\frac{\pi}{2}\right|dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x+\frac{\pi}{2}\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}\, dx$ (= S とおく)

〜〜部 = y とおくと

$$\frac{\pi^2}{2} - x^2 = y^2 \quad (y \geqq 0)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{2}$$



よって $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2}\, dx$ は右図の黒ぬり部の面積に等しいので $\pi\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^2}{8}$

$$S = \left[\sin x + \frac{\pi}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi^2}{8}$$

$$= 1 + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi^2}{8} = \underline{1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^3}{16}}$$