藤田医大2023前期

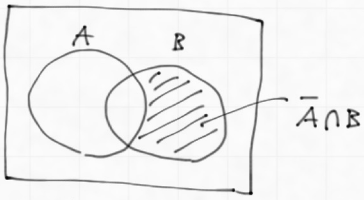
1

(1) $U=\{2,3,4,5,\dots,27,28\}$

$A=\{2,4,6,8,\dots,28\}$

$B=\{4,7,10,13,\dots,28\}$　　　　$\overline{C}=\{7,14,17,21,28\}$

$2023=7\times17^2$　　　$C=\{2,3,4,5,6,8,\dots,16,18,\dots\}$



$A\cap B=\{4,10,16,22,28\}$　　$n(A\cap B)=\mathbf{5}$ ア

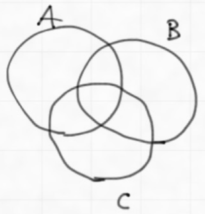
$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=9-5=\mathbf{4}$ イ

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)=27-14-9+5=\mathbf{9}$ ウ

$n(\overline{A\cup B})=n(\overline{A}\cap\overline{B})=\mathbf{9}$ エ

$A\cap B\cap C=\{4,10,16,22\}$ だから $n(A\cap B\cap C)=\mathbf{4}$ オ

$A\cap B\cap\overline{C}=\{28\}$　　$n(A\cap B\cap\overline{C})=\mathbf{1}$ カ



$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

$\overline{C}$ の要素で奇数なのは 7, 17, 21

このうち B の要素でないものは 17, 21　　$n(\overline{A\cup B\cup C})=\mathbf{2}$ キ

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\sqrt{x^2-5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2(x^2-5)}{x^2+x\sqrt{x^2-5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1+\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}}=\frac{5}{1+1}=\mathbf{\frac{5}{2}}$ ク ケ

(3) $y'=2\times\frac{3}{2}\times x^{\frac{3}{2}-1}=3x^{\frac{1}{2}}$

長さ $\displaystyle=\int_0^{\frac{5}{3}}\sqrt{1+(3x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx=\int_0^{\frac{5}{3}}\sqrt{1+9x}\,dx=\left[\frac{2}{3}(9x+1)^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{9}\right]_0^{\frac{5}{3}}$

$\displaystyle=\frac{2}{27}\left(4^3-1\right)=\mathbf{\frac{14}{3}}$ コサ シ

(4) 極形式で表す $\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right\}^n$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}n\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}n\right)$

これが成り立つのは　$\frac{\pi}{4}n=-\frac{\pi}{4}n+2\pi k$ （kは整数）が成り立つときで

$n=4k$

n は2023以下の正の整数，$2023\div4=505\dots3$ だから $\overset{スセソ}{\mathbf{505}}$ 個ある

(5) $f(x)=\dfrac{1}{\tan4x}\left(\dfrac{1}{\cos^2 4x}\right)\times4=\dfrac{4}{\cos4x\sin4x}=\dfrac{8}{\sin8x}$

$f\left(\frac{\pi}{48}\right)=\dfrac{8}{\sin\frac{\pi}{6}}=\mathbf{16}$ タチ

(6) $\alpha=\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}=\sqrt{5}+1$

$(\alpha-1)^2=\sqrt{5}^2=5$ より　$\alpha^2-2\alpha-4=0$

$\alpha^5-\alpha^4-12\alpha^3+12\alpha^2+16\alpha=(\alpha^2-2\alpha-4)(\alpha^3+\alpha^2-6\alpha+4)+16$

$=\mathbf{16}$ ツテ

```
                 1    1   -6    4
1  -2  -4 ) 1   -1  -12   12   16    0
            1   -2   -4
                 1   -8   12
                 1   -2   -4
                     -6   16   16
                     -6   12   24
                           4   -8    0
                           4   -8  -16
                                    16
```

(7) $f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}=\dfrac{\cos^3 3x}{\cos^3 3x+\sin^3 3x}$

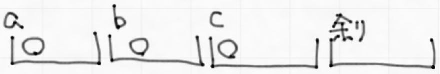
$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$ について $\frac{\pi}{6}-x=t$ とおくと $\left(\frac{dt}{dx}=-1\ ,\ \begin{array}{c|c} x & 0\to\frac{\pi}{6} \\ \hline t & \frac{\pi}{6}\to 0\end{array}\right)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} f\left(\frac{\pi}{6}-t\right)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f\left(\frac{\pi}{6}-t\right)dt$$

以上より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f\left(\frac{\pi}{6}-t\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{6}} f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)dx=\mathbf{0}$ ト

また $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{f(x)+f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin^3 3x}{\sin^3 3x+\cos^3 3x}+\frac{\cos^3 3x}{\cos^3 3x+\sin^3 3x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\,dx=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)dx=\frac{\pi}{\mathbf{12}}$ ナ

(8)


5コのボールを上の4つの箱に入れる入れ方は $_4H_5={}_8C_5=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}=56$

$\dfrac{56}{6^3}=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{27}}$ ヌ ネノ

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 6), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4)
(1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 3), (1, 3, 4), (2, 2, 2), (2, 2, 3)

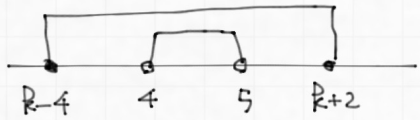
$$\frac{1\times2+\frac{3!}{2!}\times8+3!\times5}{6^3}=\frac{2+24+30}{6^3}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{27}}$$ ハ ヒフ

(9) $x^2-9x+20<0\iff 4<x<5\ \ldots①$

$x^2-2(k-1)x+k^2-2k-8\leqq0\iff(x-k+4)(x-k-2)\leqq0$

$k-4\leqq k+2$ だから $k-4\leqq x\leqq k+2\ \ldots②$

① が ② の範囲に含まれていればよい



$k-4\leqq4$ かつ $5\leqq k+2$ $\quad\therefore\ \mathbf{3}\leqq k\leqq\mathbf{8}$

(10) $n=1$ $\quad S_1 = a_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1^3}{a_1}\right) \Leftrightarrow 2a_1 = a_1 + \frac{1}{a_1} \Leftrightarrow a_1^2 = 1 \quad a_1 > 1 \ (\because a_1 > 0)$

$n=2$ $\quad S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2^3}{a_2}\right) \Leftrightarrow 2 + 2a_2 = a_2 + \frac{8}{a_2} \Leftrightarrow a_2^2 + 2a_2 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (a_2+4)(a_2-2) = 0 \quad a_2 = 2 \quad (\because a_2 > 0) \quad S_2 = 1+2 = 3$

$n=3$ $\quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{3^3}{a_3}\right) \Leftrightarrow 6 + 2a_3 = a_3 + \frac{27}{a_3} \Leftrightarrow a_3^2 + 6a_3 - 27 = 0$

$\Leftrightarrow (a_3+9)(a_3-3) = 0 \quad a_3 = 3 \quad (\because a_3 > 0) \quad S_3 = 1+2+3 = 6$

$a_n = n$, $\quad S_n = 1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ と推測できる. …(*)

(i) $n=1$ のときは成り立つ

(ii) $n=k$ のとき $a_k = k$, $S_k = \frac{1}{2}k(k+1)$ が成り立つと仮定する

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_{k+1} + \frac{(k+1)^3}{a_{k+1}}\right)$

$k(k+1) + 2a_{k+1} = a_{k+1} + \frac{(k+1)^3}{a_{k+1}}$

$\left(a_{k+1} + (k+1)^2\right)\left(a_{k+1} - (k+1)\right) = 0 \qquad \therefore a_{k+1} = k+1$

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

よって仮定の下で $n=k+1$ のときも成り立つ

(i)(ii)より数学的帰納法により(*)は成り立つ. $\quad S_5 = \frac{1}{2}\times5\times6 = \overset{マミ}{15} \quad S_{20} = \frac{1}{2}\times20\times21 = \overset{ムメモ}{210}$

2

(1) $S_2=\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx$ において.

$g(x)=y$ とおくと. $g(x)$ は $f(x)$ の逆関数だから $x=f(y)$

$\dfrac{dx}{dy}=f'(y)$,

x	$f(a) \to f(b)$
y	$a \to b$

$$S_2=\int_a^b y f'(y)dy=\Big[yf(y)\Big]_a^b-\int_a^b 1\cdot f(y)\,dy=bf(b)-af(a)-S_1$$

よって $S_1+S_2=$ **$bf(b)-af(a)$**

(2) $f(x)=\sqrt{\sqrt{1+x}-1}=y$ とおくと $y^2=\sqrt{1+x}-1$ $y^2+1=\sqrt{1+x}$

$(y^2+1)^2=1+x$ $x=y^4+2y^2$

$g(x)=x^4+2x^2$ とする

$$\int_{f(3)}^{f(99)}(x^4+2x^2)\,dx=\int_1^3(x^4+2x^2)\,dx=\Big[\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{2}{3}x^3\Big]_1^3=\frac{986}{15}$$

(1)より $\displaystyle\int_3^{99}f(x)\,dx+\frac{986}{15}=99\times3-3\times1=294$

$$\int_3^{99}f(x)\,dx=294-\frac{986}{15}=\boldsymbol{\frac{3424}{15}}$$

(3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4}{x}-1}=y$ とおく. $\dfrac{4}{x}-1=y^2$ $x=\dfrac{4}{y^2+1}$ $g(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$

$$\int_{f(1)}^{f(3)}\frac{4}{x^2+1}dx=\int_{\sqrt3}^{\frac{1}{\sqrt3}}\frac{4}{x^2+1}dx$$

$x=\tan\theta$ とおく. $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$,

x	$\sqrt3 \to \frac{1}{\sqrt3}$
θ	$\frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{6}$

$$\int_{\sqrt3}^{\frac{1}{\sqrt3}}\frac{4}{x^2+1}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{4}{1+\tan^2\theta}\times\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}4\,d\theta=4\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2}{3}\pi$$

(1)より

$$\int_1^3 f(x)\,dx=3\cdot\sqrt{\frac{4}{3}-1}-1\sqrt{\frac{4}{1}-1}-\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt3-\sqrt3+\frac{2}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$$

---

(2)別解) $\sqrt{1+x}=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

x	$3 \to 99$
t	$2 \to 10$

$$\int_3^{99}\sqrt{\sqrt{1+x}-1}\;dx=\int_2^{10}\sqrt{t-1}\times2\sqrt{1+x}\,dt=\int_2^{10}2t\sqrt{t-1}\,dt$$

$\sqrt{t-1}=s$ とすると $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}=\dfrac{1}{2s}$,

t	$2 \to 10$
s	$1 \to 3$

$t-1=s^2$

$$\int_2^{10}2t\sqrt{t-1}\,dt=\int_1^3 2(s^2+1)s\times2s\,ds=\int_1^3(4s^4+4s^2)\,ds=\Big[\tfrac{4}{5}s^5+\tfrac{4}{3}s^3\Big]_1^3=\frac{4\cdot242}{5}+\frac{104}{3}$$

$$=\frac{2904+520}{15}=\boldsymbol{\frac{3424}{15}}$$

3

(1) 相異なる2つの格子点を (a, b), (c, d) とおく.（a, b, c, d は全て整数）

この2点を結ぶ線分上に e点が存在すると仮定する.

格子点を $\left(x,\ q+\frac{1}{2}\right)$ とすると　（q は整数）.

$0 \leqq s \leqq 1$ を満たす実数 s を用いて

$$\left(x,\ q+\frac{1}{2}\right) = s(a, b) + (1-s)(c, d)$$

と表すことができ、

$$q + \frac{1}{2} = sb + (1-s)d$$

より　$(b-d)s = q - d + \frac{1}{2}$

$b - d = 0$ のとき　$q - d = -\frac{1}{2}$ となるが. q, d はいずれも整数なので. これは成立しない.

$b - d \neq 0$ のとき　$s = \dfrac{q-d+\frac{1}{2}}{b-d} = \dfrac{2q-2d+1}{2(b-d)}$

このとき

$$x = sa + (1-s)c = (a-c) \times \frac{2q-2d+1}{2(b-d)} + c = \frac{(a-c)(2q-2d+1) + 2c(b-d)}{2(b-d)}$$

となるが. これは $\left(x, q+\frac{1}{2}\right)$ が e点であることに矛盾する（上式右辺は有理数）

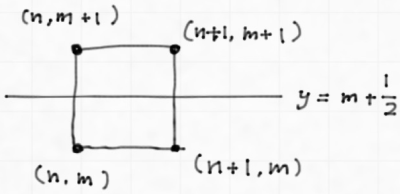
以上より. 2つの格子点を結ぶ任意の線分上に e点は存在しないことが示された.

(2) 整数 n, m を用いて　正方形の頂点は (n, m), $(n+1, m)$, $(n+1, m+1)$, $(n, m+1)$ と表せる

この正方形の内部にある格子点は、整数 p を用いて

$\left(p+e,\ m+\frac{1}{2}\right)$ または $\left(p-e,\ m+\frac{1}{2}\right)$

と表すことができ、内部にあることから



$n < p+e < n+1$　または　$n < p-e < n+1$

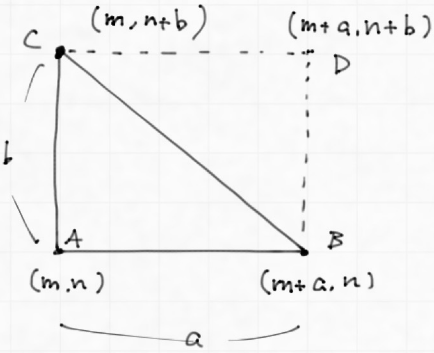
$\Leftrightarrow$　$n-e < p < n+1-e$　または　$n+e < p < n+1+e$

を満たす. $2.7 < e < 2.8$ だから.

$n-2.8 < p < n-1.7$　または　$n+2.7 < p < n+3.8$

$p = n-2, n+3$

よって格子点内に存在する e点は **2個**



(3) 右のような直角三角形を考える.（m, n, a, b は全て整数）

(2)より. 右図の長方形 ABDC 内の e点の総数は $ab \times 2$

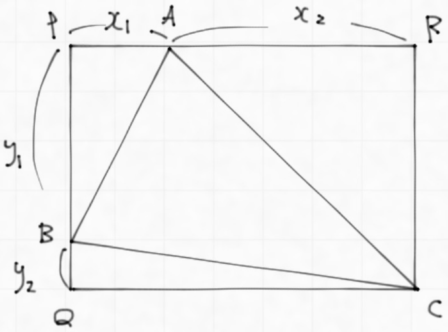
(1)より 線分 BC 上に e点は存在しない

したがって △ABC 内の e点の総数は半分の ab 個

△ABC の面積は $\frac{1}{2}ab$ だから. △ABC 内の e点の個数の半分である

x 軸, y 軸と平行な辺が異なる場合も同様なので題意は示される.

(4) 右図のような三角形ABCを考え、この三角形について
題意の条件が成り立つことを示せば、他の形でも同様だから、
題意を示すことになる (x_1, x_2, y_1, y_2は全て整数)



長方形PQCR内のe点は $(x_1+x_2)(y_1+y_2)\times 2$ 個
△APB内のe点は x_1y_1
△BQC内のe点は $y_2(x_1+x_2)$
△ACR内のe点は $x_2(y_1+y_2)$

(1)より格子点を結ぶ線分上にe点は存在しないので △ABC内のe点の総数は

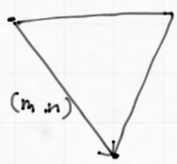
$$2(x_1+x_2)(y_1+y_2)-x_1y_1-y_2(x_1+x_2)-x_2(y_1+y_2)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1$$

△ABCの面積は

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-\frac{1}{2}x_1y_1-\frac{1}{2}y_2(x_1+x_2)-\frac{1}{2}x_2(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1)$$

以上より、△ABCの面積は、この三角形の内部にあるe点の個数の$\frac{1}{2}$に等しく、題意は示された。

(5) 全ての頂点が格子点であるような正三角形が存在すると仮定する。
このとき、三角形の一辺を表すベクトルは整数m, nを
用いて (m, n) と表せる (∵ 頂点は格子点)



このとき正三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(m^2+n^2)$$

ともとめられるが、この値は無理数であり、整数ではなく (4)の結論に矛盾している。
よって 全ての頂点が格子点であるような正三角形は存在しない