①

(1) $|w| = R$ だから $w = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおける

条件より $x + yi = R\cos\theta + Ri\sin\theta + \frac{1}{R}(\cos\theta - i\sin\theta)$

$$x = R\cos\theta + \frac{1}{R}\cos\theta,\quad y = R\sin\theta - \frac{1}{R}\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos\theta = \frac{R}{R^2+1}x,\quad \sin\theta = \frac{R}{R^2-1}y$$

これらを $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ に代入.

$$\frac{R^2x^2}{(R^2+1)^2} + \frac{R^2y^2}{(R^2-1)^2} = 1$$

長軸半径 $\frac{R^2+1}{R}$, 短軸半径 $\frac{R^2-1}{R}$, 中心$(0, 0)$のだ円.

(2) $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ とする $(r > 0)$

$$x + yi = r\cos\alpha + ri\sin\alpha + \frac{1}{r}\cos\alpha - \frac{1}{r}i\sin\alpha$$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha + \frac{1}{r}\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha - \frac{1}{r}\sin\alpha \end{cases} \rightleftarrows \begin{cases} r + \frac{1}{r} = \frac{x}{\cos\alpha} & \cdots ① \\ r - \frac{1}{r} = \frac{y}{\sin\alpha} \end{cases}$$

辺々加えて. $2r = \frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}$ $\cdots ②$

①より $r^2 - \frac{r}{\cos\alpha}x + 1 = 0$ に上式を代入

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}\right)^2 - \frac{1}{2\cos\alpha}\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}\right)x + 1 = 0$$

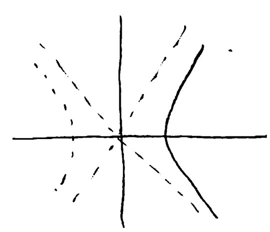
$$\frac{x^2}{4\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{4\sin^2\alpha} = 1 \quad \cdots ③$$

②で $r > 0$ だから $\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} > 0 \Leftrightarrow y > -(\tan\alpha)x$ $\cdots ④$

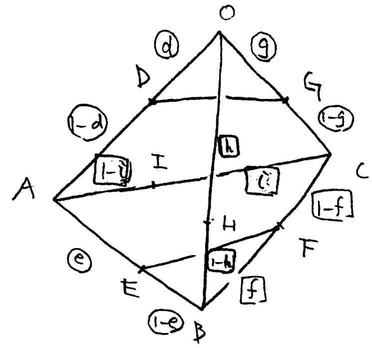
③は漸近線が $y = \pm\tan\alpha\, x$ の双曲線なので

④より, $x + yi$ は $\frac{x^2}{4\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{4\sin^2\alpha} = 1$ の $x > 0$

の領域部分を描く.



②



(1) $\vec{OA}=\vec{a}$. $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ とおく.

また

$\vec{OD}=d\vec{a}$, $\vec{OE}=e\vec{b}+(1-e)\vec{a}$

$\vec{OF}=f\vec{c}+(1-f)\vec{b}$, $\vec{OG}=g\vec{c}$

$\vec{OH}=h\vec{b}$, $\vec{OI}=i\vec{a}+(1-i)\vec{c}$

となるように, d, e, f, g, h を定める

$\vec{DG}\parallel\vec{EF}$ より $\vec{DG}=k\vec{EF}$ を満たす実数kが存在する.

これより

$$g\vec{c}-d\vec{a}=k\left(f\vec{c}+(1-f)\vec{b}-e\vec{b}-(1-e)\vec{a}\right)$$

kは.
($k\neq 0$を満たす実数)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は互いに1次独立なので, 係数を比較して.

$$\begin{cases} -d=-k(1-e) & \cdots ① \\ 0=k(1-f-e) & \cdots ② \\ g=kf & \cdots ③ \end{cases}$$

$k\neq 0$ だから $1=f+e$ …④

よって $AE:EB=e:1-e=1-f:f=CF:FB$

証明終.

(2) 正八面体の向かい合う辺は平行

(1)と同様に考えることで, 以下が必要であることが分かる

GH // IE より $e+h=1$ …⑤, $BE:EA=CI:IA$

DH // IF より. $i+f=1$ …⑥ $AI:IC=BF:FC$

①+②+③より $d=g$ …⑦

同様に GH // IE より $g=h$ …⑧

④〜⑧より $f=h=e$, $d=g=h$

DE // GF より $d+e=1$, HF // DI より $f+h=1$

これらを連立して $d=e=f=g=h=e=\frac{1}{2}$.

DGHが正三角形とならなければならないが、$\triangle DGH \backsim \triangle ABC$ だから

$\triangle ABC$ も正三角形。

同様に考えることで $\triangle OAB$、$\triangle OAC$、$\triangle OBC$ も正三角形。

よって四面体OABCは正四面体。

③

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{2q}{q^2-1}$$

$$\tan(\alpha+2\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta} = \frac{1+\frac{2pq}{q^2-1}}{p-\frac{2q}{q^2-1}} = \frac{q^2-1+2pq}{p(q^2-1)-2q} = 2$$

$\Leftrightarrow \quad q^2+2pq-1 = 2pq^2-2p-4q$

$\Leftrightarrow \quad p(2q^2-2q-2) = q^2+4q-1$

ここで　$2q^2-2q-2=0$ を満たす q は　$q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　であり、これは整数では

ないので　$2q^2-2q-2 \neq 0$

よって

$$p = \frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)} = \frac{1}{2}+\frac{5q}{2(q^2-q-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{5q}{q^2-q-1}\right) \quad \cdots \quad (*)$$

p は自然数なので　$1+\frac{5q}{q^2-q-1} \geqq 2$ であることが必要

$q^2-q-1 \leqq 0$ のとき　左辺 $\leqq 1$ となるので $q^2-q-1>0$.

このとき　$\frac{5q}{q^2-q-1} \geqq 1 \Leftrightarrow q^2-6q-1 \leqq 0 \Leftrightarrow 3-\sqrt{10} \leqq q \leqq 3+\sqrt{10}$.

$\Leftrightarrow \quad 1 \leqq q \leqq 6 \quad (\because q$ は自然数$)$

(i) $q=1$ のとき

$(*)$ より　$p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{-1}\right)=-2$　.　不適

(ii) $q=2$ のとき

$p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{10}{4-2-1}\right)=\frac{11}{2}$　　不適

(iii) $q=3$ のとき

$p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{15}{9-3-1}\right)=2$　　$\therefore (p, q) = (2, 3)$

(iv) $q=4$ のとき

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{20}{16-4-1}\right) = \frac{15}{11}$$ 不適

(v) $q=5$ のとき

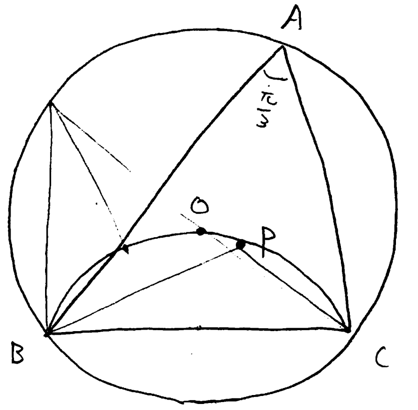
$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{25}{25-5-1}\right) = \frac{22}{19}$$ 不適

(vi) $q=6$ のとき

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{30}{36-6-1}\right) = \frac{59}{58}$$ 不適

(i)〜(vi) より　$(p, q) = (2, 3)$.

④ (1) $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$



BPは$\angle B$の二等分線なので

$\angle PBC = \frac{1}{2}\angle B$

同様に $\angle PCB = \frac{1}{2}\angle C$

$\angle BPC = \pi - \angle PBC - \angle PCB$

$= \pi - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = \pi - \frac{1}{2}(\angle B - \angle C) = \pi - \frac{1}{2}(\pi - \angle A)$

$= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{3}\right) = \underline{\frac{2}{3}\pi}$

(2) 外接円の中心をOとすると

$\angle BOC = 2\angle BAC = \frac{2}{3}\pi = \angle BPC$

したがって B, C, O, P は同一円周上に存在する（この円をEとする）

PはEの劣弧BC上を動くので、PがBCから最も離れるのは

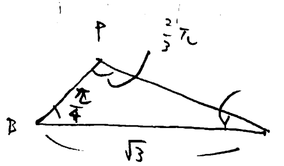
OB = OCのとき すなわち PとOが一致したときである

このとき、OとBCとの距離は $OB\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ であり

これが内接円の半径となる。つまり内接円の最大値は $\frac{1}{2}$

$\angle B \to \frac{\pi}{2}$のとき $\angle PBC \to \frac{\pi}{4}$

$\angle PCB \to \pi - \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{12}\pi$



正弦定理より

$\frac{PB}{\sin\angle PCB} = \frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2}{3}\pi}$ $\therefore PB = 2\sin\angle PCB \to 2\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

よってrの範囲は $\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} < r \leqq \frac{1}{2}$

$\underline{\frac{\sqrt{3}-1}{2} < r \leqq \frac{1}{2}}$

③ $xe^{-x}=f(x)$とおく.

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$.

$f(x)$の増減は右のとおり.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$

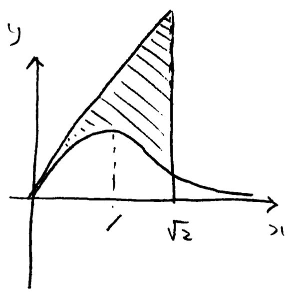
$y=ax$と$y=f(x)$の交点は

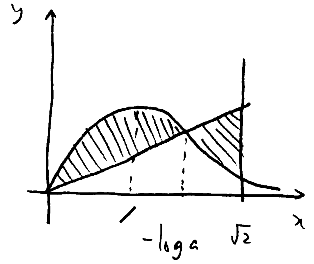
$$xe^{-x}=ax \iff x(e^{-x}-a)=0 \iff x=0,-\log a$$

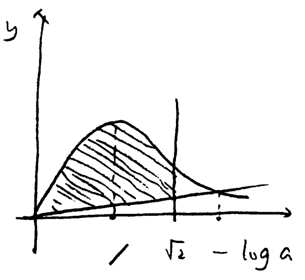
$0<-\log a<\sqrt{2}$となるのは $e^{-\sqrt{2}}<a<1$

$S(a)$は

(i) $a\geq 1$のとき (ii) $e^{-\sqrt{2}}<a<1$のとき (iii) $a\leq e^{-\sqrt{2}}$のとき







(i)のとき$a=1$で$S(a)$は最小. (iii)のとき$a=e^{-\sqrt{2}}$で最小となるのは

明らかなので. $a=1$, $a=e^{-\sqrt{2}}$を(ii)に含め、(ii)のときを考える

(ii)において

$$S(a)=\int_0^{-\log a}xe^{-x}-ax\,dx+\int_{-\log a}^{\sqrt{2}}ax-xe^{-x}\,dx$$

$$=\left[-xe^{-x}-e^{-x}-\frac{1}{2}ax^2\right]_0^{-\log a}+\left[-xe^{-x}-e^{-x}-\frac{1}{2}ax^2\right]_{\sqrt{2}}^{-\log a}$$

$$=\left\{a\log a-a-\frac{1}{2}a(\log a)^2\right\}\times 2-(0-1-0)-(-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}-a)$$

$$=2a\log a-a(\log a)^2-a+1+(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$$

$S'(a) = 2\log a - 2 - (\log a)^2 - 2a\log a \times \frac{1}{a} - 1$

$= -(\log a)^2 + 1$

$S'(a) = 0$ となるのは $\log a = \pm 1$ すなわち $a = e, \frac{1}{e}$ のときで

そのうち $-\sqrt{2} \leqq a \leqq 1$ を満たすのは $a = \frac{1}{e}$

$S(a)$ の増減は下のようになる

a	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$S(\frac{1}{e}) = -\frac{2}{e} - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$

$= -\frac{4}{e} + 1 + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$

よって $a = \frac{1}{e}$ のとき $S(a)$ は最小となり $S(\frac{1}{e}) = 1 - \frac{4}{e} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$

⑥

最初のkコの数でできるk桁の数を X_k

$$X_k \equiv 0 \pmod 3$$

となる確率を p_k （以下合同式は全て3を法とする）

$X_k \equiv 1$ となる確率を q_k とする.

p_{k+1}について.

(i) $X_k \equiv 0$のとき

$k+1$個目の箱から $\boxed{3}$ をひいたとき.

$$X_{k+1} \equiv X_k + 3 \equiv 0$$

となるので、その確率は $\frac{1}{5}p_k$.

(ii) $X_k \equiv 1$のとき

$k+1$回目の箱から $\boxed{2}$ または $\boxed{5}$ をひけばよい. $\frac{2}{5}q_k$.

(iii) $X_k \equiv 2$のとき

$k+1$回目の箱から $\boxed{1}$ または $\boxed{4}$ をひけばよい $\frac{2}{5}(1-p_k-q_k)$

(i)〜(iii)より

$$p_{k+1} = \frac{1}{5}p_k + \frac{2}{5}q_k + \frac{2}{5}(1-p_k-q_k) = -\frac{1}{5}p_k + \frac{2}{5}$$

$$p_{k+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{5}\left(p_k - \frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore \quad p_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$p_n = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$$p_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n} + \frac{1}{3}$$

よって X が3で割り切れる確率は $\underline{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n} + \frac{1}{3}}$