①

(1) C_1とC_2の式を連立する

$$ax^2 = b(x-1)^2 + c$$

$$(a-b)x^2 + 2bx - b - c = 0 \quad \cdots ①$$

$a=b$のとき、C_1とC_2が接することはないので $a \neq b$ 上式の判別式を0として

$$D/4 = b^2 + (a-b)(b+c) = ab + ac - bc = 0$$

$c=a$のとき $ac=0$となり、a, cが0でないことに矛盾するので $a \neq c$

①の解(重解)は

$$x = \frac{-b}{a-b} = \frac{-\frac{ac}{c-a}}{a-\frac{ac}{c-a}} = \frac{-ac}{\cancel{ac}-a^2-\cancel{ac}} = \frac{c}{a}$$

$$y = a\left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a}$$

よって接点は $(x, y) = \left(\frac{c}{a}, \frac{c^2}{a}\right)$

(2) $\frac{c}{a} = X$, $\frac{c^2}{a} = Y$ とおく

$c = aX$, を (i)に順に代入

$$1 + a^2X^2 \leqq 2a \quad \cdots ②$$

$c \neq 0$だから $X \neq 0$

$X \neq 0$のとき、 $a = \frac{Y}{X^2}$ これを②に代入

$$1 + \frac{Y^2}{X^4}X^2 \leqq 2\frac{Y}{X^2}$$

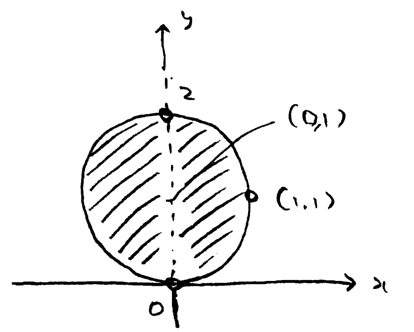
$$X^2 + Y^2 \leqq 2Y$$

$$X^2 + (Y-1)^2 \leqq 1 \qquad (X \neq 0)$$

まとめると (X, Y)は $x^2 + (y-1)^2 \leqq 1$ の

$x \neq 0$ の範囲を動く。

ただし、$a \neq c$より、$(x, y) = (1, 1)$は除く。



上図 斜線部、境界を含むが y軸上は除く、(1,1)も除く

②

$$n^3-7n+9 = n^3-n-6n+9$$
$$=(n-1)n(n+1)+3(3-2n)$$

ここで $n-1,\ n,\ n+1$ は連続3整数なので、いずれか1つは3の倍数だから

上式は必ず3の倍数.

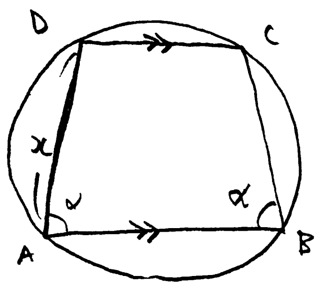
したがって. n^3-7n+9 が素数となるのは 3に限られる.

$$n^3-7n+9=3$$

$$(n-1)(n-2)(n+3)=0$$

よって $\underline{n=1,\ 2,\ -3}$

③



ABCDは円に内接するので

$\angle BCD + \angle DAB = \pi$ より $\angle BCD = \pi - \alpha$

同様に

$\angle CDA = \pi - \alpha$

よってABCDは $AB \parallel CD$ の等脚台形

$AD = x$ としたとき $BC = x$

またABCDは円に内接するので、トレミーの定理より

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD \quad \cdots ①$$

$\triangle ABD$ について、正弦定理より

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = 2 \times 1 \iff BD = 2\sin\alpha = AC \quad \cdots ②$$

①に②を代入

$$AB \cdot CD + x \times x = 4\sin^2\alpha$$

$$\iff AB \cdot CD = 4\sin^2\alpha - x^2 \quad \cdots ③$$

③をkの式に代入

$$k = x^2(4\sin^2\alpha - x^2) = -(x^2 - 2\sin^2\alpha)^2 + 4\sin^4\alpha.$$

これは $x = \sqrt{2}\sin\alpha$ のとき最大となり、その値は $4\sin^4\alpha$

よってkの値の最大値は $\underline{4\sin^4\alpha}$

4

$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\omega$ と表す.

$\omega^3=1$, $|\omega|=1$ より　$\omega^2=\overline{\omega}$, $\overline{\omega^2}=\omega$

また　$\omega\cdot\omega=\omega^2$,　$\omega^2\omega=\omega^3=1$

以上より,

z_k は $\omega, \omega^2, 1$ のいずれかであり,

$z_k=\omega$ のとき　表がでると $z_{k+1}=\omega^2$,　裏がでると $z_{k+1}=\overline{\omega}=\omega^2$

$z_k=\omega^2$ 〃　〃 $z_{k+1}=\omega^3=1$　〃 $z_{k+1}=\overline{\omega^2}=\omega$

$z_k=1$ 〃　〃 $z_{k+1}=\omega$　〃 $z_{k+1}=\overline{1}=1$

$z_k=1$ となる確率を p_k,　$z_k=\omega$ となる確率を q_k とすると.

p_{k+1}, p_k は上の関係を用いて

$$p_{k+1}=(1-p_k-q_k)\times\frac{1}{2}+p_k\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_k \quad \cdots①$$

$$q_{k+1}=(1-p_k-q_k)\times\frac{1}{2}+p_k\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}q_k \quad \cdots②$$

①+②　$p_{k+1}+q_{k+1}=1-\frac{1}{2}(p_k+q_k)$　$\cdots③$

①−②　$p_{k+1}-q_{k+1}=-\frac{1}{2}(p_k-q_k)=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^k(p_1-q_1)$

ここで $p_1=\frac{1}{2}$, $q_1=\frac{1}{2}$ だから, $p_k-q_k=0$.　$\therefore p_k=q_k$.

これを③に代入

$$2p_{k+1}=1-\frac{1}{2}\times 2p_k$$

$$p_{k+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_k$$

$$p_{k+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_k-\frac{1}{3}\right)$$

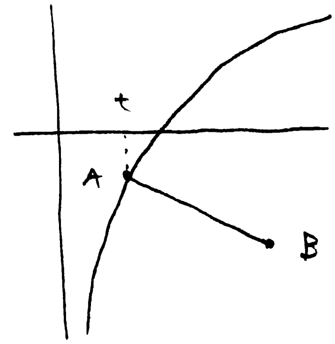
よって　$\left\{p_k-\frac{1}{3}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{3}\left(=\frac{1}{6}\right)$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列!

$$p_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\therefore$ $z_n=1$ となる確率は $\underline{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

⑤

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ だから Aにおける接線の傾きは $\dfrac{1}{t}$



よって法線の傾きは $-t$、$\vec{AB}$ は $(1,-t)$ と平行

で、かつ長さは1で、x成分は正だから

$$\vec{AB} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\begin{pmatrix}1\\-t\end{pmatrix}$$

よって

$$\vec{OB} = \begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix} = \vec{OA}+\vec{AB} = \begin{pmatrix}t\\\log t\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\begin{pmatrix}1\\-t\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u(t) = t + \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad v(t) = \log t - \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \dfrac{du}{dt} = 1 - \dfrac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

(2)
$$L_1(r) = \int_r^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_r^1 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx.$$

$$L_2(r) = \int_r^1 \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_r^1 \sqrt{1+\frac{1}{t^2}+\frac{t^2}{(1+t^2)^3}+\frac{1}{(1+t^2)^3}-\frac{2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{t(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}\,dt$$

$$= \int_r^1 \sqrt{1+t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(1+t^2)^3}}\,dt$$

$$= \int_r^1 \sqrt{1+t^2}\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right|dt$$

ここで $t^2 < 1+t^2 < (1+t^2)^3$ より $t < (1+t^2)^{\frac{3}{2}}$ だから $\dfrac{1}{t} > \dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$

よって $L_2(r) = \displaystyle\int_r^1 \sqrt{1+t^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dt$

$$L_1(r)-L_2(r) = \int_r^1 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx - \int_r^1 \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \int_r^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad \cdots (*)$$

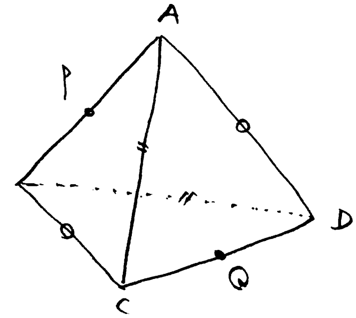
$x = \tan\theta$ とすると、$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$、$r = \tan\theta$ を満たす θ を α として.

$$(*) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \times \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4} - \alpha$$

$r \to +0$ のとき $\theta \to 0$ だから

$$\lim_{r \to +0} (L_1(r) - L_2(r)) = \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

⑥ $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AC}=\vec{c}$, $\vec{AD}=\vec{d}$ とおく.



(1)

条件より

$$|\vec{c}|=|\vec{d}-\vec{b}| \iff |\vec{c}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}$$

$$|\vec{c}-\vec{b}|=|\vec{d}| \iff |\vec{d}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{PQ}=\vec{b}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}|\vec{c}|^2-\frac{1}{2}|\vec{d}|^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}|\vec{d}|^2-\frac{1}{2}|\vec{c}|^2\right)-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2$$

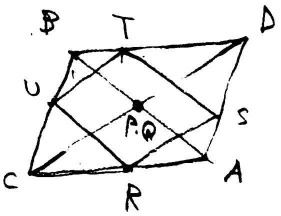
$$=0$$

よって AB ⊥ PQ.

(2) (1)と同様に、$\vec{CD}\cdot\vec{PQ}$ をもとめると 0となるので、CD⊥PQ.

PQと垂直な平面でABCDを切ることを考える。

P→Qを見る向きに、P, Qを重なるように書いた図は右のようになる。

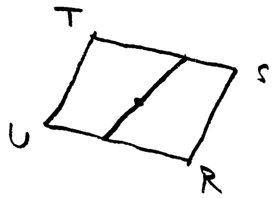


断面とAC, AD, BD, BCの交点をR, S, T, Uとすると、AB ⊥ PQだから RU // AB (∵R, Uは断面上にある) 同様に TS // AB より TS // RU

CD⊥PQより RS // CD, UT // CD より RS // UT

よって RSTUは平行四辺形であり、対称性よりPQと断面との交点は平行四辺形の交点である。

したがってPQを含む平面でRSTUを切ったとき、平行四辺形は必ず二等分されることになる。



P→Qへと積分するとき、PQを含む平面で分けられる2つの面積が常に等しいので、ABCDは必ず二等分されることがわかる