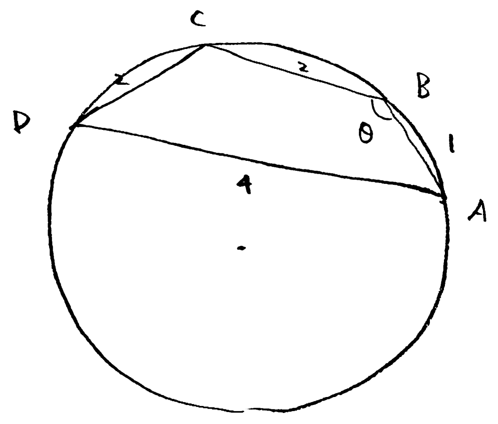
①



(1) $AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos\theta$

$= \underline{5 - 4\cos\theta}$

(2) $\angle CDA = 180° - \theta$

$AC^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos(180° - \theta)$

$= 20 + 16\cos\theta$

$5 - 4\cos\theta = 20 + 16\cos\theta$

$20\cos\theta = -15$

$\cos\theta = \underline{-\frac{3}{4}}$

$AC = \sqrt{5 - 4 \times (-\frac{3}{4})} = \underline{2\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \sqrt{1 - (-\frac{3}{4})^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

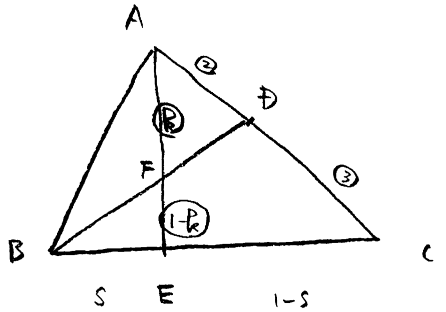
$2R = \frac{AC}{\sin\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$

$R = \underline{\frac{4\sqrt{14}}{7}}$

$ABCD = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{7}}{4}$

$= \underline{\frac{5\sqrt{7}}{4}}$

②



(1) メネラウスの定理より

$$\frac{CB}{BE}\times\frac{EF}{FA}\times\frac{AD}{DC}=1$$

$$\frac{1}{s}\times\frac{1-k}{k}\times\frac{2}{3}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad 2-2k=3sk$$

$$\Leftrightarrow\quad k=\frac{2}{3s+2}$$

(2) $\triangle AFD=\frac{2}{3+2}\times\frac{k}{1}\times\triangle AEC$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3s+2}\times(1-s)\triangle ABC$$

$\triangle EFB=(1-k)\triangle ABE=\frac{3s}{3s+2}\times s\triangle ABC$

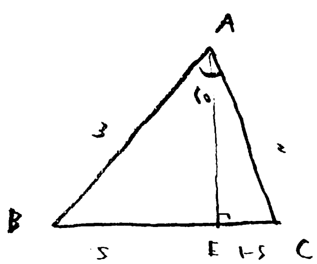
$\triangle AFB=2\triangle EFB$ より

$$\frac{4(1-s)}{5\cancel{(3s+2)}}=2\times\frac{3s^2}{\cancel{3s+2}}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2(1-s)=15s^2$$

$$s=\frac{-1+\sqrt{31}}{15}$$

(3)



$\vec{AB}=\vec{b},\ \vec{AC}=\vec{c}$ とする

$|\vec{b}|=3,\ |\vec{c}|=2,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=3\times2\times\cos60^\circ=3$

$\vec{AE}=s\vec{c}+(1-s)\vec{b}$

$\vec{AE}\cdot\vec{BC}=(s\vec{c}+(1-s)\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$$=4s-3s+3(1-s)-(1-s)\times9=0$$

$$s=\frac{6}{7}$$

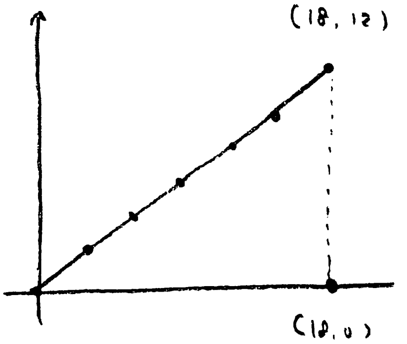
③

(1) 18, 12 の最大公約数は 6 なので、

線分OA上の点は $(3k, 2k)$ $(k=0,1,2,3,4,5,6)$ と表せる

よってOA上にある格子点は全部で7個

(2)



$0 \leqq x \leqq 18$ かつ $0 \leqq y \leqq 12$ 内にある

格子点の総数は 19×13 コ

そのうちOA上にある7コを除くと

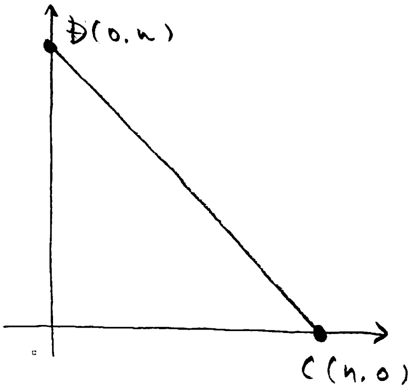
OAの下側にあるのは半分なので

$$\frac{19 \times 13 - 7}{2} = 120.$$

OA上の点とあわせて、△OABの周および内部にある格子点は

$$120 + 7 = \underline{127}$$

(3)



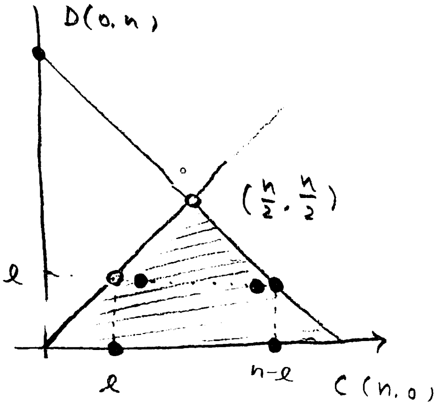
$x = k$ のとき $(0 \leqq k \leqq n)$

$(k, 0), (k, 1), \cdots (k, n-k)$ の

$n-k$ 個の格子点がある

よって $m_1 = \sum_{k=0}^{n} (n-k+1)k$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{2}n(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \underline{\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n}$$



n が奇数のとき、

左図の斜線内について $|P_x - P_y|$ を考える

($y=x$ 上は除き、x 軸、と $x+y=n$ 上は含む)

$y = l$ のとき

範囲内の格子点は

$(l+1, l), (l+2, l), \cdots (n-l, l)$

このとき $|P_x - P_y|$ は　$P_x > P_y$ てなっている、ので

$$|P_x - P_y| = P_x - P_y$$

となり その和は

$$(l+1-l) + (l+2-l) + \cdots + (n-l-l)$$

$$= 1+2+3+\cdots (n-2l) = \frac{1}{2}(n-2l)(n-2l+1)$$

l の範囲は $0 \leqq l \leqq \frac{n}{2}-1$ だから斜線内の $|P_x - P_y|$ の合計は

$$\sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{2}(n-2l)(n-2l+1) = \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) + 2l^2 - (2n+1)l \right\}$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{2}{6}\left(\frac{n-2}{2}\right)\frac{n}{2}(n-2+1) - (2n+1) \times \frac{1}{2}\,\frac{n-2}{2} \times \frac{n}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(n^3+n^2) + \frac{1}{12}(n^3-3n^2+2n) - \frac{1}{8}(2n^3-3n^2-2n)$$

$$= \frac{1}{24}(6n^3+6n^2+2n^3-6n^2+4n-6n^3+9n^2+6n)$$

$$= \frac{1}{24}(2n^3+9n^2+10n) = \frac{1}{12}n^3 + \frac{3}{8}n^2 + \frac{5}{12}n$$

$y=x$ 上では　$P_x = P_y$ となっているので $|P_x - P_y| = 0$

$y>x$ のときは 先と同様.

$$\therefore \quad m_2 = \frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{4}n^2 + \frac{5}{6}n$$

n が奇数のとき

$$m_3 = \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2}(n-2l)(n-2l+1) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{4}n^2 + \frac{5}{6}n + \frac{1}{4}$$