① (1) 直線PQの式は $y=\dfrac{2t-(1-t)}{t-(t-1)}(x-t)+2t$

$\iff y=(3t-1)x-3t^2+3t$

これと $x=k$ の交点は $\underline{(k,\ (3t-1)k-3t^2+3t)}$

(2)

tを固定して考える。

線分PQは $y=(3t-1)x-3t^2+3t$ $(t-1\le x\le t,\ 0\le t\le 1)$

だから線分PQと $x=a$ が交点をもつための条件は、aが

$t-1\le a\le t$ …①

を満たし、かつ $0\le t\le 1$ が成り立つことである …(*)

①は $a\le t\le a+1$

と変形できるので、(*)の条件は、

(i) $-1\le a\le 0$ のときは $0\le t\le a+1$

(ii) $0<a\le 1$ 〃 $a\le t\le 1$

が成り立つことと書き換えられる

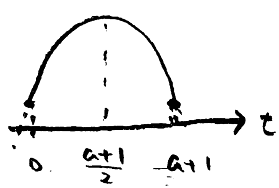
(i) $-1\le a\le 0$ のとき、

tが $0\le t\le a+1$ のとき、$x=a$ と線分PQは交点をもつ。

そのy座標は(1)より $(3t-1)a-3t^2+3t$ (これを $f(t)$ とおく)

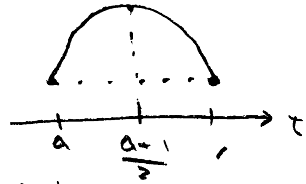
$f(t)=-3\left(t-\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$

と変形でき、$0\le\frac{a+1}{2}\le a+1$ となることから、yのとりうる値の範囲は



$f(0)=-a\le y\le f\left(\frac{a+1}{2}\right)=\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$

(ii) $0<a\le 1$ のとき、



tが $a\le t\le 1$ のとき交点をもち、$y=f(t)$

$t=\frac{a+1}{2}$ は $t=a$ と $t=1$ の中央の値なので $a\le\frac{a+1}{2}\le 1$

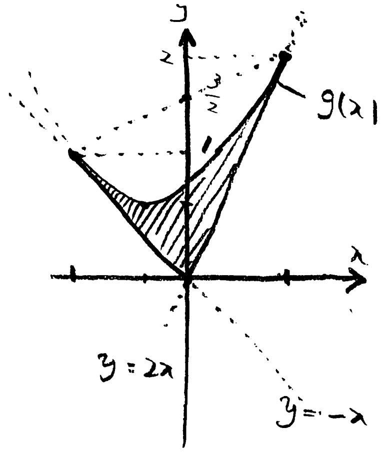
よって $f(1)=2a\le y\le f\left(\frac{a+1}{2}\right)=\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$

(i)(ii)より $-1\le a\le 0$ のとき $-a\le y\le \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$

$0<a\le 1$ のとき $2a\le y\le \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$

(3) $g(a) = \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}$ とおく

$g(a) = \frac{3}{4}\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$



aが[−1, 1]の範囲を動くとき

PQとx=aが交点のy座標の

範囲を図示すると右のようになる

よって面積Sは

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times (1-(-1)) - \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times (1-(-1))^3$$

$$= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

(4) 体積をVとする

$$V = \int_{-1}^{1} g(x)^2 \pi\, dx - \frac{1}{3} \times 1^2\pi \times 1 - \frac{1}{3} \times 2^2\pi \times 1$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \frac{9}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{16} + \frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{4}x\, dx - \frac{1}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} \frac{9}{16}x^4 + \frac{11}{8}x^2 + \frac{9}{16}\, dx - \frac{5}{3}\pi$$

$$= 2\pi \left[\frac{9}{80}x^5 + \frac{11}{24}x^3 + \frac{9}{16}x\right]_0^1 - \frac{5}{3}\pi$$

$$= 2\pi \left(\frac{9}{80} + \frac{11}{24} + \frac{9}{16}\right) - \frac{5}{3}\pi$$

$$= \frac{144}{240}\pi = \frac{24}{40}\pi = \underline{\frac{3}{5}\pi}$$

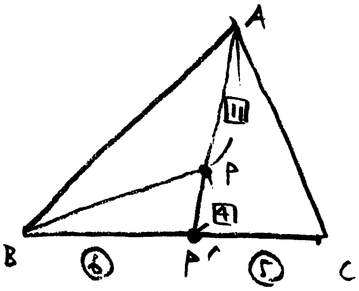
② $4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+6\overrightarrow{PC}=\vec{0}$,　$4\overrightarrow{QA}+5\overrightarrow{QB}+6\overrightarrow{QC}+7\overrightarrow{QD}=\vec{0}$

$4(-\overrightarrow{AP})+5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+6(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{15}\overrightarrow{AC}$.

$4(-\overrightarrow{AQ})+5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AQ})+6(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ})+7(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AQ})=\vec{0}$

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{22}(5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{AD})$



(1) $\overrightarrow{AP}=\underline{\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$

(2) $\overrightarrow{AP}=\frac{11}{15}\left(\frac{5}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{AC}\right)$

ここで $\frac{5}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{AC}$ の示す点を P'

とすると、P'は BC を 6:5 に内分する点である。また、

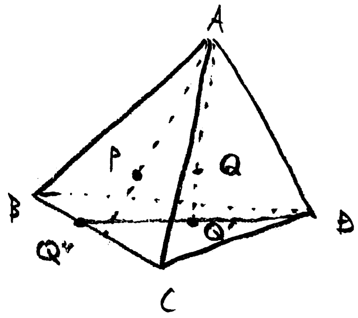
$\overrightarrow{AP}=\frac{11}{15}\overrightarrow{AP'}$ より　AP : PP' = 11 : 5.

したがって　$\triangle PBC=\frac{4}{15}\triangle ABC$.

$\triangle PAB=\frac{11}{15}\triangle ABP'=\frac{11}{15}\times\frac{6}{11}\triangle ABC=\frac{6}{15}\triangle ABC$

よって　$\triangle PAB:\triangle PBC=\frac{6}{15}:\frac{4}{15}=\underline{3:2}$

(3) $\overrightarrow{AQ}=\frac{9}{11}\left(\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{18}\overrightarrow{AC}+\frac{7}{18}\overrightarrow{AD}\right)$



$\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{18}\overrightarrow{AC}+\frac{7}{18}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AQ'}$ とすると

$\overrightarrow{AQ}=\frac{9}{11}\overrightarrow{AQ'}$ より　AQ : QQ' = 9 : 2

$\overrightarrow{PQ'}=\overrightarrow{AQ'}-\overrightarrow{AD}$

$=\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{18}\overrightarrow{AC}-\frac{11}{18}\overrightarrow{AD}$

$=\frac{5}{18}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\frac{6}{18}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\frac{5}{18}\overrightarrow{DB}+\frac{6}{18}\overrightarrow{DC}=\frac{11}{18}\left(\frac{5}{11}\overrightarrow{DB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{DC}\right)$

$\frac{5}{11}\overrightarrow{DB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DQ''}$ とすると　DQ' : Q'Q'' = 11 : 7

以上より ABCDの体積をVとして

四面体 $QABC=\frac{9}{9+2}Q'ABC=\frac{9}{11}\times\frac{7}{18}V=\frac{7}{22}V$

〃　$QBCD=\frac{2}{9+2}V=\frac{2}{11}V$

$\underline{QABC:QBCD=7:4}$

③ (1) 直径が4本で、あと、もう1つの頂点を選ぶ。 $4\times {}_6C_1$

もとめる確率 P_1 は $P_1 = \dfrac{4\times {}_6C_1}{{}_8C_3} = \dfrac{4\cdot6\cdot3\cdot2}{8\cdot7\cdot6} = \dfrac{3}{7}$

(2) (1)と同様、確率を P_2 として

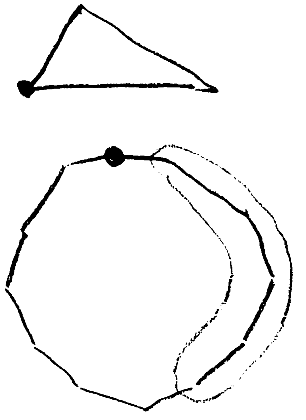
$$P_2 = \frac{\frac{n}{2}\times{}_{n-2}C_1}{{}_nC_3} = \frac{\cancel{n}(\cancel{n-2})\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cancel{n}(n-1)(\cancel{n-2})} = \frac{3}{n-1}$$

(3) 鈍角三角形の鈍角の角の頂点に注目する

この頂点のとり方は12通り

このとき他の2頂点はその右側の5つの頂点から2つを選ぶことになる(右図)

よってもとめる確率を P_3 として



$$P_3 = \frac{12\times{}_5C_2}{{}_{12}C_3}$$

$$= \frac{\cancel{12}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{12}\cdot11\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{2}} = \frac{6}{11}$$

④ (1) $f'(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}$　　$\therefore f'(2) = 2e.$

$f''(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}xe^{\frac{x}{2}}$　　$\therefore f''(2) = \frac{3}{2}e$

(2) $y = g(x)$ とする.

$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数なので　$x = f(y)$

したがって　$\frac{dx}{dy} = f'(y)$

$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)} = g'(x)$$

ここで $f(2) = 2e^{\frac{2}{2}} = 2e$ なので.　$g(2e) = 2.$

よって　$g'(2e) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2e}$

$$g''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(y)}\right) = \frac{\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(y)}\right)}{\frac{dx}{dy}}$$

$$= \frac{-f''(y)}{f'(y)^2} \times \frac{1}{f'(y)}$$

$$g''(2e) = \frac{-f''(2)}{f'(2)^3} = \frac{-\frac{3}{2}e}{8e^3} = -\frac{3}{16e^2}$$

$$\therefore g'(2e) = \frac{1}{2e},\quad g''(2e) = -\frac{3}{16e^2}$$