①

(1) $x^2+nx-n=0$ の 2 解は $x=\dfrac{-n\pm\sqrt{n^2+4n}}{2}$

$$\therefore\ \alpha_n=\frac{-n-\sqrt{n^2+4n}}{2},\quad \beta_n=\frac{-n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$$

$$\gamma_n=\frac{2}{n+2}\alpha_n+\frac{n}{n+2}\beta_n$$

$$=\frac{-n-\sqrt{n^2+4n}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\sqrt{n^2+4n}}{n+2}$$

$$=\frac{(n-2)\sqrt{n^2+4n}-n(n+2)}{2(n+2)}$$

$$=\frac{(n-2)^2(n^2+4n)-n^2(n+2)^2}{2(n+2)\left((n-2)\sqrt{n^2+4n}+n(n+2)\right)}$$

$$=\frac{\quad}{2(n+2)\left((n-2)\sqrt{n^2+4n}+n(n+2)\right)}$$

②

(1) $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$,  $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{1+16+1} = 3\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3+8+1 = 12$.

$\cos\angle AOB = \dfrac{12}{\sqrt{14} \times 3\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$,  $\sin\angle AOB = \sqrt{1+\frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

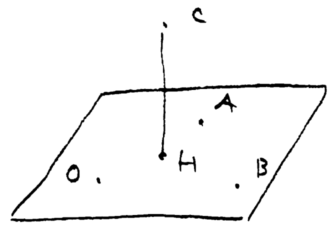
よって平行四辺形の面積は  $\sqrt{14} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3}{7}} = \underline{6\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の両者に垂直なベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とすると、

$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} = 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{n} = 0$ より $\vec{n}$ として $(1, 1, -5)$ とすることができる

H は OAB 上にあるので  $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n} = 0$.

CH は OAB と垂直に交わるので  $\overrightarrow{CH} = k\vec{n}$




2つの式を整理する

$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = k\vec{n}$

を代入して

$(k\vec{n} + \overrightarrow{OC}) \cdot \vec{n} = 0$

$k|\vec{n}|^2 + \overrightarrow{OC} \cdot \vec{n} = 0$

$k(1+1+25) + 1 - 1 - 25 = 0$

$k = \dfrac{25}{27}$

$\therefore \overrightarrow{OH} = \dfrac{25}{27}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{52}{27} \\ -\frac{2}{27} \\ \frac{10}{27} \end{pmatrix}}$

(2) $\overrightarrow{AP} = (x, -3)$, $\overrightarrow{BP} = (x, -2)$, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} = x^2+6$

$$\cos\angle APB = \frac{x^2+6}{\sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2+4}}$$

ここで $x^2 = X \geqq 0$ とおいて $\cos^2 = \dfrac{(X+6)^2}{(X+9)(X+4)} = f(X)$ とすると

$$f'(X) = \frac{2(X+6)(X+9)(X+4) - (X+6)^2(X+4+X+9)}{(X+9)^2(X+4)^2}$$

$$= \frac{(X+6)(2X^2+26X+72-2X^2-25X-72)}{(X+9)^2(X+4)^2} = \frac{X(X+6)}{(X+9)^2(X+4)^2}$$

$\therefore$ $X = 0, 6$ のとき $f'(X)$ は $0$ となり、$f(X)$ の増減は下のようになる

| $X$ | $0$ | $\cdots$ | $6$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(X)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(X)$ | / | $\searrow$ | $\frac{24}{25}$ | $\nearrow$ |

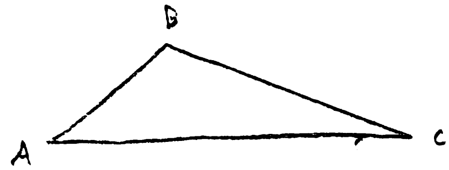
よって $X = 6$ すなわち $x = \pm\sqrt{6}$ のとき最小となる

$\overrightarrow{CP} = (x+1, -1)$ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP} = x^2+x+3$

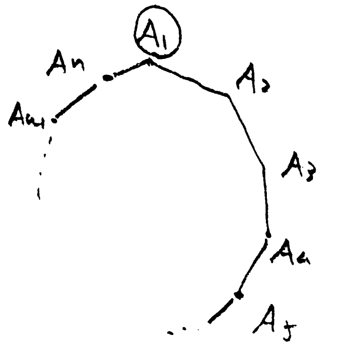
$$\cos\angle APC = \frac{x^2+x+3}{\sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2+2x+2}}$$

③

直角、または鈍角三角形を数える




右のような∠Bを鈍角とする鈍角三角形の鈍角の左側のAの頂点を固定する（$A_1$だとする）




このとき、$n$が偶数ならば

B、Cは $A_2$ ～ $A_{\frac{n}{2}+1}$ までのうちの2点を選べばよいので、その選び方は、

$$_{\frac{n}{2}}C_2 = \frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}-1\right)\times\frac{1}{2} \text{ 通り}$$

Aを$A_1$～$A_n$まで動かすことを考えると、鈍角（または直角）三角形は全部で

$$\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\times\frac{1}{2}\times n \text{ 通り}$$

よって、鋭角三角形となる確率は

$$1-\frac{\frac{1}{2}n\times\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{_nC_3} = \frac{n-4}{4n-4}$$

$n$が奇数のときも同様に考えて、

$$1-\frac{_{\frac{n-1}{2}}C_2\times n}{_nC_3} = 1-\frac{\frac{1}{2}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{2}\times n}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)} = \frac{n+1}{4(n-2)}$$

よってもとめる確率を$P_n$とすると

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{4(n-2)} & (n\text{が奇数のとき}) \\[2ex] \dfrac{n-4}{4(n-1)} & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

④ $a(i, j+1) = a(i+1, j) - a(i, j) \quad \cdots \quad (*)$

$(*)$で $i=0$, $j=n-1$とすると

$$a(0, n) = a(1, n-1) - a(0, n-1) \quad \cdots ①$$

$(*)$で $i=1$, $j=n-2$とすると

$$a(1, n-1) = a(2, n-2) - a(1, n-2) \quad \cdots ②$$

$(*)$で $i=0$, $j=n-2$とすると

$$a(0, n-1) = a(1, n-2) - a(0, n-2) \quad \cdots ③$$

②.③を①に代入すると

$$\begin{aligned} a(0, n) &= a(2, n-2) - a(1, n-2) - a(1, n-2) + a(0, n-2) \\ &= a(2, n-2) - 2a(1, n-2) + a(0, n-2) \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} a(0, n) &= a(3, n-3) - 3a(2, n-3) + 3a(1, n-3) - a(0, n-3) \\ &= a(4, n-4) - 4a(3, n-4) + 6a(2, n-4) - 4a(1, n-4) + a(0, n-4) \\ &= {}_4C_0\, a(4, n-4) - {}_4C_1\, a(3, n-4) + {}_4C_2\, a(2, n-4) - {}_4C_3\, a(1, n-4) \\ &\qquad + {}_4C_4\, a(0, n- \\ &= \sum_{k=0}^{4} {}_4C_k (-1)^k a(4-k, n-4) \\ &= \sum_{k=0}^{4} {}_4C_k (-1)^k \{ a(5-k, n-5) - a(4-k, n-5) \} \\ &= {}_4C_0\, a(5-k, n-5) + \sum_{k=0}^{3} (-1)^{k+1} \left( {}_4C_k + {}_4C_{k+1} \right) a(4-k, n-5) \\ &\qquad - {}_4C_4 (-1)^4 a(0, n-5) \\ &= {}_5C_0\, a(5-k, n-5) + \sum_{k=1}^{4} (-1)^k ({}_5C_k)\, a(5-k, n-5) + (-1)^5 a(0, \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{5} (-1)^k {}_5C_k \, a(5-k, n-5)$$

以下同様

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {}_nC_k \, a(n-k, 0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {}_nC_k \, a_{n-k}$$

(5)

$$\log P_n = \frac{1}{n}\log\frac{(an+bn)!}{(an)!\, n^{bn}}$$

$$= \frac{1}{n}\log\frac{(an+bn)(an+bn-1)\cdots(an+1)}{n^{bn}}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\log(a+b) + \log\left(a+\frac{bn-1}{n}\right) + \log\left(a+\frac{bn-2}{n}\right) + \cdots + \log\left(a+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{bn}\log\left(a+\frac{k}{n}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\log P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{bn}\log\left(a+\frac{k}{n}\right)$$

$$= \int_0^b \log(a+x)\,dx$$

$$= \Big[(a+x)\log(a+x) - a - x\Big]_0^b$$

$$= (a+b)\log(a+b) - a - b - a\log a + a$$

$$= \log(a+b)^{a+b} + \log e^{-b} + \log a^{-a}$$

$$= \log\frac{(a+b)^{a+b}}{e^a e^b}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{(a+b)^{a+b}}{e^a e^b}$$

⑥

$$kx - \frac{1}{l}x^2 \leqq \log(1+x) \leqq kx - \frac{1}{m}x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{m}x^2 \leqq kx - \log(1+x) \leqq \frac{1}{l}x^2$$

ここで $k=1$ とすると

$$\frac{1}{m}x^2 \leqq x - \log(1+x) \leqq \frac{1}{l}x^2$$

$f(x) = \frac{1}{l}x^2 - (x - \log(1+x))$ とすると

$$f'(x) = \frac{2}{l}x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

$l=1$ とすると $f'(x) = 2x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{2x^2+x}{1+x} = \frac{x(2x+1)}{1+x}$

となり、$-0.03 \leqq x \leqq 0$ のとき $f'(x) \leqq 0$

$f(0) = 0$ なので $-0.03 \leqq x \leqq 0$ の範囲において $f(x) \geqq 0$

$x - \log(1+x) - \frac{1}{m}x^2 = g(x)$ とする.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{2}{m}x$$

$m=2$ とすると

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} - x = \frac{-x^2}{x+1} \leqq 0$$

よって $g(x)$ は単調減少 $g(0)=0$ だから $g(x) \geqq 0$

以上より $k=1,\ l=1,\ m=2$ とすれば 不等式は成りたつ.

このとき $x=-0.03$ とすると

$$-0.03-0.03^2 \leqq \log 0.97 \leqq 0.03-0.03^2\times\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ -0.0309 \leqq \log 0.97 \leqq -0.03045.$$

$0.97^n<0.5$ の両辺の対数をとると

$$n\log 0.97 < -\log 2 = -0.693$$

$$-0.0309n \leqq n\log 0.97 \leqq -0.03045n$$

だから $-0.003045n < -0.693$

となる最小の $n$ をもとめると. $n=23$.

$n=22$ のとき

$$-0.0309\times 22 = -0.6798 > 0.693$$

だから $n=23$ ではじめて. $0.97^n<0.5$ が成りたつ.

$\underline{n=23}$