東京大学2020

1 (1) 仮に $a<0$ とすると $\lim_{x\to\infty}(ax^2+bx+c)=-\infty$ となるので、3つの不等式をすべて満たす実数 x が $x>p$ のようにはならない。($\because$ x を十分に大きくしたとき、不等式 $ax^2+bx+c>0$ は成立しない)。

同様に $b<0$ のとき、$bx^2+cx+a>0$ は $x>p$ を解に含むことはなく、$c<0$ も同様。

以上より、a, b, c は全て負にはならず、すべて0以上である。

(2) a, b, c がすべて正だとすると $\lim_{x\to-\infty}(ax^2+bx+c)=+\infty$ などから、十分に大きな x をとることで3つの不等式を同時に満たすことができる。よって a, b, c の少なくとも1つは0である。

(3) a, b, c は対等なので $a=0$, $b\leqq c$ としても一般性を失わない。

$a=0$ のとき、不等式は

$$bx+c>0 \quad \cdots ①, \quad bx^2+cx>0 \quad \cdots ② \qquad cx^2+b>0 \quad \cdots ③$$

$b=c=0$ のとき、3つの不等式は成立しない。

$b=0$, $c>0$ のとき、

① は $c>0$, ② は $x>0$ ③ は $cx^2>0$

となり、$c>0$, $cx^2>0$ は任意の実数 x について成り立つので、3つの不等式が同時に成り立つのは $x>0$ のとき。よって $p=0$

$0<b\leqq c$ のとき、

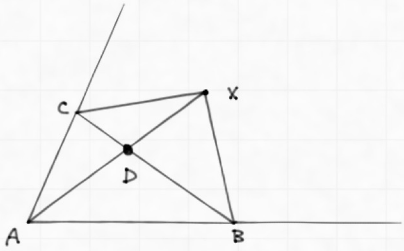
① は $x>-\frac{c}{b}$, ② は $x<-\frac{c}{b}$, $x>0$ ③ は $x^2>-\frac{b}{c}$

となる。$x^2>-\frac{b}{c}$ は任意の実数 x について成り立つので3つの不等式が全て成り立つのは $x>0$ のとき、よって $p=0$

以上より、$p=0$ となることが示された。

2

・半直線ABおよびACによって囲まれる領域内にXがあるときを考える(右図，半直線上も含む)



このとき AXとBCは交わるので、この交点をDとすると

$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX$

$= (\triangle ABX + \triangle CAX) + \triangle BCX$

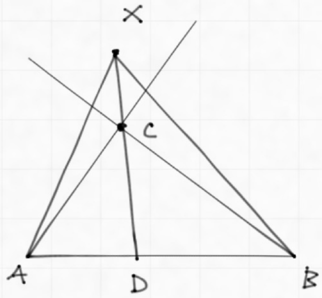
$= \triangle ABC + \triangle BCX \times 2$

$= 1 + 2\triangle BCX$

よって条件は　$2 \leqq 1 + 2\triangle BCX \leqq 3 \iff \frac{1}{2} \leqq \triangle BCX \leqq 1$　となる

BCを底辺として　$\triangle ABC : \triangle BCX = AD : DX$　だから　$\triangle BCX = \frac{DX}{AD} \times 1$

よって　$\frac{1}{2} \leqq \frac{DX}{AD} \leqq 1$ を満たすとき、不等式が成り立つ



・Xが半直線ACおよびBCに囲まれる領域にあるとき

$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = \triangle ABX + \triangle ABX - \triangle ABC$

$= 2\triangle ABX - 1$

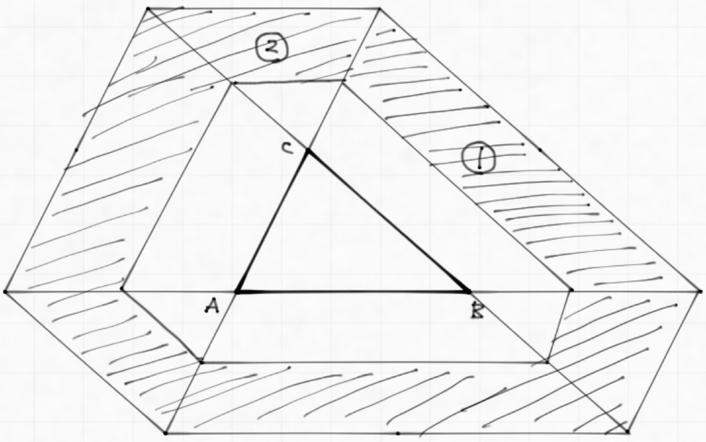
$2 \leqq 2\triangle ABX - 1 \leqq 3 \iff \frac{3}{2} \leqq \triangle ABX \leqq 2$

XCとABの交点をDとして　$\triangle ABC : \triangle ABX = CD : XD$ だから

$\triangle ABX = \frac{XD}{CD}$　よって　$\frac{3}{2} \leqq \frac{XD}{CD} \leqq 2$

Xが上記以外の範囲にあるときも同様

よってXの存在する範囲は右図斜線部



①の面積は　$1 \times 2^2 - 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$

②　〃　$1 - 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

よってXの動きうる範囲の面積は

$\left(\frac{7}{4} + \frac{3}{4}\right) \times 3 = \frac{15}{2}$

3

(1) $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{3\cancel{(1+t)}\sqrt{1-t}}{\cancel{(1+t)}\sqrt{1+t}} = \dfrac{3\sqrt{1-t^2}}{1+t} = g(t)$ とおく

$-1<t<1$ の範囲で考える

$$g'(t) = \frac{3\times\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\times(-2t)(1+t) - 3\sqrt{1-t^2}\times 1}{(1+t)^2} = \frac{-3t-\cancel{3t^2}-3+\cancel{3t^2}}{(1+t)^2\sqrt{1-t^2}} = -\frac{6}{(1+t)^2\sqrt{1-t^2}} < 0$$

$-1<t<1$ において $g'(t)<0$ だから $-1<t\leqq 1$ において $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少する

(2) $f(t)^2 = (1+t)^3 + 9(1+t)^2(1-t) = -8t^3-6t^2+12t+10 = h(t)$ とおく

$h'(t) = -24t^2-12t+12 = 12(1-2t)(t+1)$

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で $h'(t)=0$ となるのは $t=-1, \frac{1}{2}$

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$h(t)$ の増減は右のようになる

$h(-1)=0$, $h(\frac{1}{2}) = \frac{27}{8} + 9\times\frac{9}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{27}{2}$ $h(1)=8$

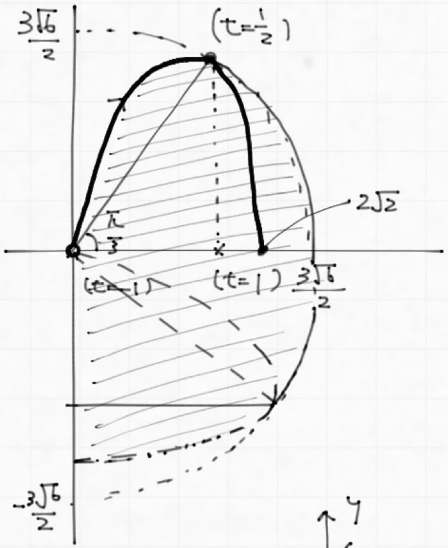
$f(t) = \sqrt{h(t)}$ だから. $f(t)$ も $-1\leqq t<\frac{1}{2}$ で増加し, $\frac{1}{2}<t\leqq 1$ で減少する.

$f(t)$ は $t=\frac{1}{2}$ で最大となり最大値は $\sqrt{\frac{27}{2}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{6}}{2}}$

(3) $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で x が単調に増加するのは明らかで.

(1) より OP の傾きは単調に減少する. したがって P の軌跡は右のようになることが分かる (右図太線)

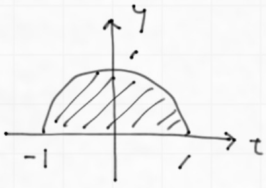
D を回転させたときの通過領域は右のようになる.



$x(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ $\dfrac{dx}{dt} = \frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}$

D の面積 S_D は

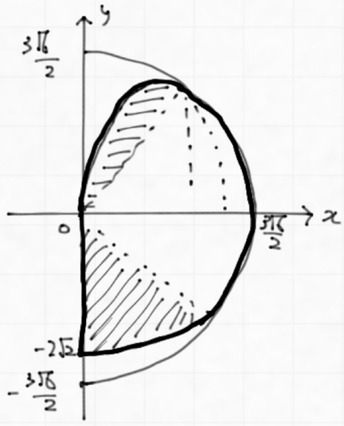
$$S_D = \int_0^{2\sqrt{2}} y(t)\,dx = \int_{-1}^{1} 3(1+t)\sqrt{1-t}\times\frac{3}{2}\sqrt{1+t}\,dt$$
$$= \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt + \frac{9}{2}\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt$$



$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ について $y=\sqrt{1-t^2}$ とすることで右のような単位円の半分に対応づけられるので $\frac{1}{2}\pi$

$$\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt = \left(-\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}(1-t^2)'(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} = 0$$

よって $S_D = \frac{9}{2}\times\frac{1}{2}\pi = \frac{9}{4}\pi$



D を回転させた通過領域は右グラフの太枠部となるが、このうち, 斜線部分の合計は S_D と等しい.

よって, もとめる面積 S は

$$S = S_D + \pi\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2\times\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{45}{8}\pi}$$

4

(1) $a_{n,2} = 2^0\cdot 2^1 + 2^0\cdot 2^2 + \cdots + 2^0\cdot 2^{n-1} + 2^1\cdot 2^2 + \cdots + 2^1\cdot 2^{n-1} + \cdots + 2^{n-2}\cdot 2^{n-1}$

$= \left\{(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})^2 - 2^{0^2} - 2^{1^2} - 2^{2^2} - \cdots - 2^{n-1^2}\right\} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}(2^n-1)^2 - \frac{1}{2}(4^0+4^1+\cdots+4^{n-1}) = \frac{1}{2}\cdot 4^n - 2^n + \frac{1}{2} - \frac{4^n-1}{4-1}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\cdot 4^n - 2^n + \frac{2}{3}$

$= \mathbf{\frac{4^n-3\cdot 2^n+2}{3}}$

(2) $f_n(x) = 1 + (2^0+2^1+\cdots 2^{n-1})x + (2^0\cdot 2^1 + 2^0\cdot 2^2 + \cdots + 2^{n-2}\cdot 2^{n-1})x^2 + \cdots + 2^0 2^1 \cdots 2^n x^{n-1}$

$= (1+2^0x)(1+2^1x)\cdots(1+2^{n-1}x)$

同様に $f_{n+1}(x) = (1+2^0x)(1+2^1x)\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)$

$\therefore \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \mathbf{1+2^nx}$

$f_n(2x) = (1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^nx)$ だから

$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = \frac{(1+2^0x)(1+2^1x)\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)}{(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)} = \mathbf{1+x}$

(3) (2)より $f_{n+1}(x) = (1+2^nx)f_n(x) = (1+x)f_n(2x)$

$1 + a_{n+1,1}x + \cdots + a_{n+1,k+1}x^{k+1} + \cdots + a_{n+1,n+1}x^{n+1}$

$= (1+2^nx)(1+a_{n,1}x+\cdots+a_{n,k}x^k + a_{n,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n,n}x^n)$

$= (1+x)(1+a_{n,1}(2x)+\cdots+a_{n,k}(2x)^k + a_{n,k+1}(2x)^{k+1}+\cdots+a_{n,n}(2x)^n)$

$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき 上式の x^{k+1} 次の係数を比較して

$a_{n+1,k+1} = 2^n\cdot a_{n,k} + a_{n,k+1} = 2^k a_{n,k} + 2^{k+1}a_{n,k+1}$

後半部から $a_{n,k+1} = \frac{2^n-2^k}{2^{k+1}-1}a_{n,k}$

$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{2^n a_{n,k} + a_{n,k+1}}{a_{n,k}} = 2^n + \frac{2^n-2^k}{2^{k+1}-1} = \frac{2^{n+k+1}-2^k}{2^{k+1}-1}$ …(*)

$k=n$ のとき $a_{n,n} = 2^0\cdot 2^1\cdots 2^{n-1} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$

$a_{n+1,n+1} = 2^0\cdot 2^1\cdots 2^{n-1}\cdot 2^n = 2^{\frac{1}{2}n(n+1)}$

だから $\frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} = 2^n$

(*)で $k=n$ とすると. $\frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} = \frac{2^{n+n+1}-2^n}{2^{n+1}-1} = 2^n$ となるので(*)は $k=n$ でも成り立つ

よって $\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \mathbf{\frac{2^{n+k+1}-2^k}{2^{k+1}-1}}$

(2) 前半の別解.

$1 \leqq k \leqq n$ のとき. $a_{n+1,k}$ について. 2^n を含まない整数の総和は $a_{n,k}$

2^n を含むものは $2^n \times a_{n,k-1}$ だから $a_{n+1,k} = a_{n,k} + 2^n a_{n,k-1}$ $(k \geqq 1)$

…①

$$f_{n+1}(x) = 1 + a_{n+1,1}x + a_{n+1,2}x^2 + a_{n+1,3}x^3 + \cdots + a_{n+1,n+1}x^{n+1}$$

$$= 1 + (a_{n,1} + 2^n)x + (a_{n,2} + 2^n a_{n,1})x^2 + (a_{n,3} + 2^n a_{n,2})x^3 + \cdots + (a_{n,n} + 2^n a_{n,n-1})x^n + a_{n,n} \times 2^n x^{n+1}$$

$$= 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n + 2^n(x + a_{n,1}x^2 + a_{n,2}x^3 + \cdots + a_{n,n-1}x^n + a_{n,n}x^{n+1})$$

$$= f_n(x) + 2^n \cdot x f_n(x) \qquad \therefore \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \mathbf{1 + 2^n x}$$

5

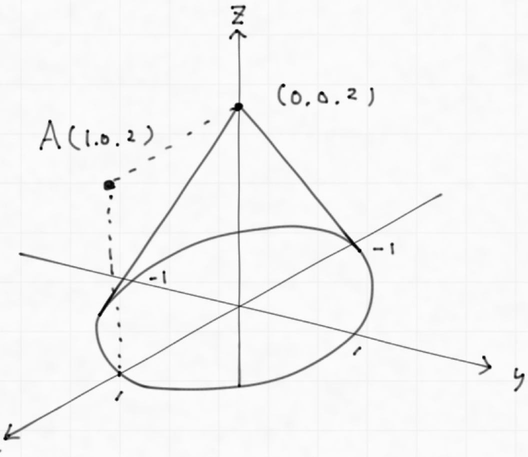
(1) Sは直円錐だから断面は中心は $(0,0,1)$ 半径 $\frac{1}{2}$ の円

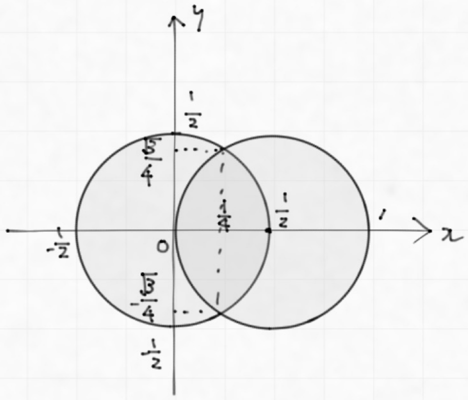
AOと $z=1$ の交点はAOの中点の $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$

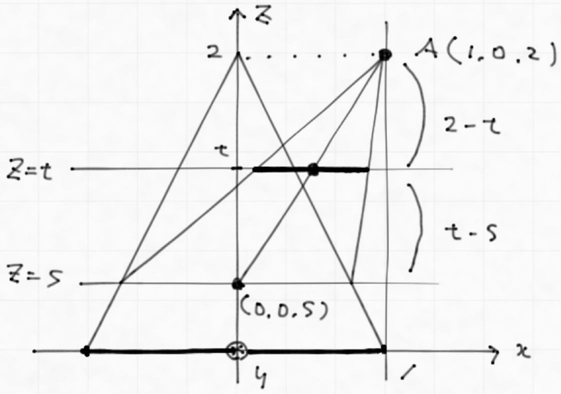
PがSの底面を動くとき、ATの通過領域はAを頂点とする円錐となるので、

中心 $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ 半径 $\frac{1}{2}$ の円

$z=1$ による断面は下のようになる







(2) $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ のときの断面を考える

$z=s$ $(0 \leqq s \leqq t)$ におけるSの断面は中心 $(0,0,s)$, 半径 $\frac{2-s}{2}$ の円

$(0,0,s)$ とAを結ぶ線分と $z=t$ との交点は $t-s : 2-t$ に内分することを利用して、

$$x = \frac{t-s}{t-s+2-t} \times 1 = \frac{t-s}{2-s}, \quad y=0, \quad z=t$$

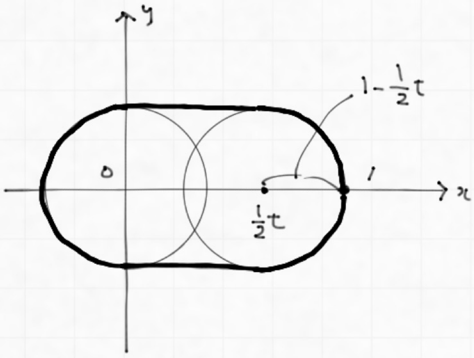
$z=s$ とSの交わってできる円とAを結ぶ直線と $z=t$ との交わりは

・$s \neq 2$ のとき　中心 $\left(\frac{t-s}{2-s}, 0, t\right)$ 半径 $\frac{2-s}{2} \times \frac{2-t}{2-s} = \frac{2-t}{2}$ の円

中心のx座標について $x = \frac{t-s}{2-s} = 1 + \frac{t-2}{2-s}$ だから、

$$1 + \frac{t-2}{2-t} = 0 \leqq x \leqq 1 + \frac{t-2}{2-0} = \frac{1}{2}t$$

よって $z=t$ とAPの交わりの範囲は右図太枠内のようになり、その面積は



$$\pi\left(1-\frac{1}{2}t\right)^2 + \frac{1}{2}t\left(1-\frac{1}{2}t\right) \times 2$$

$s=2$ のとき、APは $(0,0,2)$, $(1,0,2)$ を結ぶ線分となる。

以上より、APの通過する部分の体積Vは

$$V = \int_0^2 \left(\pi\left(1-\frac{1}{2}t\right)^2 + t - \frac{1}{2}t^2\right) dt = \left[\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}t-1\right)^3 \times 2 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3\right]_0^2$$

$$= \frac{\pi}{3} \times 0 + 2 - \frac{8}{6} - \left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}}$$

6 (1) $f(\theta) = A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha)$ とおく.

$f(0) = -\sin\alpha$

$f(\frac{\pi}{4}) = A - \sin(\frac{\pi}{4}+\alpha) > 0$

$f(\frac{3}{4}\pi) = -A - \sin(\frac{3}{4}\pi+\alpha) < 0$

$f(\frac{5}{4}\pi) = A - \sin(\frac{5}{4}\pi+\alpha) > 0$

$f(\frac{7}{4}\pi) = -A - \sin(\frac{7}{4}\pi+\alpha) < 0$

$f(2\pi) = -\sin\alpha$

$f(\theta)$ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ で連続なので. $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$ の各区間で少なくとも1回. θ 軸と交わる.

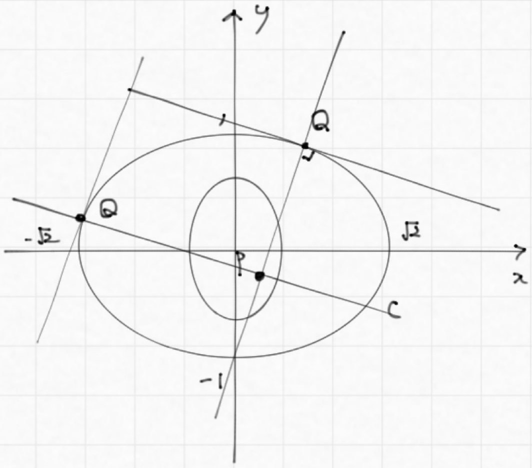
また $\sin\alpha \geqq 0$ のとき. $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4}$ で少なくとも1回 θ 軸と交わり.

$\sin\alpha < 0$ のとき. $\frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$ で少なくとも1回 θ 軸と交わる

以上の考察より. $f(\theta)$ のグラフは $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で θ 軸と少なくとも4回交わり.

したがって $f(\theta) = 0$ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で少なくとも4個の解を持つ.

よって題意の方程式は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも4個の解を持つ.



(2) $2x^2 + y^2 < r^2 \iff \dfrac{x^2}{\frac{r^2}{2}} + \dfrac{y^2}{r^2} < 1$

C上の点Qを $(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta)$ とおく ($0 \leqq \theta < 2\pi$ とする)

QにおけるCの接線は $\dfrac{(\sqrt{2}\cos\theta)x}{2} + (\sin\theta)y = 1$ だから

接線の法線ベクトルは $(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \sin\theta)$ であり. 法線は

$\sin\theta(x - \sqrt{2}\cos\theta) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta(y - \sin\theta) = 0$

$\sqrt{2}\sin\theta \cdot x - \cos\theta \cdot y - \sin\theta\cos\theta = 0$

$\sin 2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta \cdot x + 2\cos\theta \cdot y = 0$

- $2x^2 + y^2 = 0$ $(x = y = 0)$ のとき.

  上式は $\sin 2\theta = 0$ となり $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ で成り立つ

- $2x^2 + y^2 \neq 0$ ($x \neq 0$ かつ $y \neq 0$) のとき

$\sin 2\theta - \sqrt{8x^2+4y^2}\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+y^2}}\sin\theta - \dfrac{y}{\sqrt{2x^2+y^2}}\cos\theta\right) = 0$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha) = 0 \quad \cdots ①$

(ただし. α は $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+y^2}}$, $\sin\alpha = -\dfrac{y}{\sqrt{2x^2+y^2}}$ を満たす実数)

(1) より $\dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+y^2}} > 1$ であれば ① は少なくとも4つの解を持つ.

$\dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+y^2}} > 1 \iff 2x^2 + y^2 < \dfrac{1}{4}$

$0 < r \leqq \frac{1}{2}$ とすれば. D内の全ての点Pが条件を満たし. そのような r の最大値は $\frac{1}{2}$