① $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} - \sin x = \dfrac{(\sin x\cos x - x)\cos x}{\sin^2 x}$

ここで $\sin x\cos x - x = g(x)$ とする.

$g'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - 1 = \cos 2x - 1$

$-1 \leqq \cos 2x \leqq 1$ だから $g'(x) \leqq 0$. また $g(0) = 1-1 = 0$ より

$0 < x < \pi$ において $g'(x)$ は常に負であり, $g(x)$ は単調に減少する.

また $g(0) = 0-0 = 0$ だから $0 < x < \pi$ において $g(x) < 0$.

よって $f'(x) = 0$ となるのは, $\cos x = 0$ のときに限られ $x = \frac{\pi}{2}$.

以上より, $f(x)$ の増減は下のようになる

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x} + \cos x\right) = \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} + \cos x\right) = 1+1 = 2.$$

$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}\left(\frac{x}{\sin x} + \cos x\right)$ について, $\pi - x = t$ とすると

$$\lim_{t\to+0}\left\{\frac{\pi - t}{\sin(\pi - t)} + \cos(\pi - t)\right\} = \lim_{t\to+0}\left(\frac{\pi - t}{\sin t} - \cos t\right)$$

$$= \lim_{t\to+0}\left(\frac{t}{\sin t} \times \frac{\pi - t}{t} - \cos t\right) = +\infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to\pi-0} f(x) = +\infty.$

②

(1) $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{\dfrac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}}{\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!n!}} = \dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}$

$2n+1 \div n = 2 \cdots 1$ であり nと1の最大公約数は1だから、

ユークリッドの互除法により $2n+1$ と n の最大公約数は1.（$2n+1$とnは互いに素）

$2n+1 \div (n+1) = 1 \cdots n$

$n+1 \div n = 1 \cdots 1$ だから上と同様に $2n+1$ と n も互いに素

よって $\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}$ は既約分数であり、また $n, n+1$ は連続整数なので、いずれかは偶数.

$\therefore \begin{cases} p_n = \dfrac{1}{2}n(n+1) \\ q_n = 2n+1 \end{cases}$

(2) $\dfrac{q_n}{p_n} \geqq 1$ を解く. $2(2n+1) \geqq n(n+1)$ $(\because n \geqq 2)$

$n^2 - 3n - 2 \leqq 0 \iff \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \leqq n \leqq \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} < 4$.

したがって $n \geqq 4$ のとき $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ すなわち $a_n < a_{n-1}$ となる. $a_1 = {}_3C_1 = 3$.

$a_2 = \dfrac{{}_5C_2}{2!} = 5$ 　 $a_3 = \dfrac{{}_7C_3}{3!} = \dfrac{35}{6}$

$a_4 = \dfrac{{}_9C_4}{4!} = \dfrac{21}{4}$ 　 $a_5 = \dfrac{{}_{11}C_5}{5!} = \dfrac{77}{20}$, 　 $a_6 = \dfrac{{}_{13}C_6}{6!} = \dfrac{143}{60}$

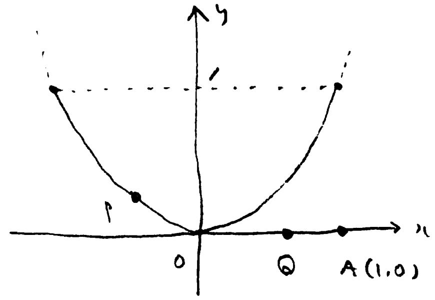
$a_7 = \dfrac{{}_{15}C_7}{7!} = \dfrac{143}{112}$, 　 $a_8 = \dfrac{{}_{17}C_8}{8!} = \dfrac{2431}{4032} < 1$.

a_9以降は1より小さいので、条件を満たすのは $n=1, 2$ のとき

③ $P(p, p^2)$,　$Q(q, 0)$ とする

$(-1 \leqq p \leqq 1,\ 0 \leqq q \leqq 1)$

$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} p \\ p^2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{k} + kq \\ \frac{p^2}{k} \end{pmatrix}$



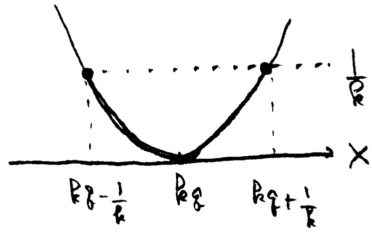
$R(X, Y)$ とし、q を固定すると

$X = \frac{p}{k} + kq$,　$Y = \frac{p^2}{k}$

$p = kX - k^2q$ を Y に代入　$Y = \frac{1}{k}(kX - k^2q)^2 = k(X - kq)^2$

また $-1 \leqq p \leqq 1$ より　$-\frac{1}{k} + kq \leqq X \leqq \frac{1}{k} + kq$

$X = \frac{1}{k} + kq$ のとき $Y = \frac{1}{k}$



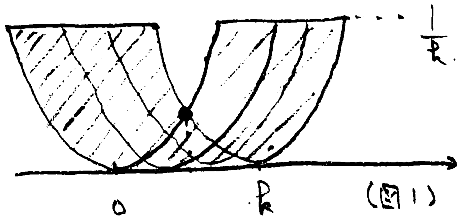
次に q を $0 \leqq q \leqq 1$ で動かす

頂点は　$0 \leqq kq \leqq k$ だから

$0 \leqq X \leqq k$ の範囲で変わるが、

放物線の形は変わらないので、

Rは右図斜線部の領域を動く。



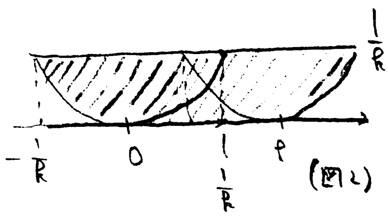
(図1)

$q = 0$ のとき　$Y = kX^2$

$q = 1$　〃　$Y = k(X-1)^2$

この2つのグラフの交点のX座標は　$X = \frac{k}{2}$

このとき　$Y = k\left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^3}{4}$



(図2)

この値が $\frac{1}{k}$ より大きいときは図2、小さいときは図1

のようなグラフになる。　$\left(\frac{k^3}{4} > \frac{1}{k} \Leftrightarrow k > \sqrt{2}\right)$

(i) $k > \sqrt{2}$ のとき (図2)

$$S(k) = \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} kx^2\,dx + \left(k + \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right) \times \frac{1}{k} = 1 + \frac{4}{3k^2}$$

(ii) $0 < k \leqq \sqrt{2}$ のとき

$$S(k) = \frac{1}{k}\left\{k + \frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{k}\right)\right\} - 2\int_{-\frac{1}{k}}^{0} kx^2\,dx - 2\int_{\frac{k}{2}}^{k}\left(\frac{1}{k} - kx^2\right)dx = 2 - \frac{k^4}{12}$$

∴ $\lim_{k \to +0} S(k) = 2$,　$\lim_{k \to \infty} S(k) = 1$.

④ $f(x) = x(x-\sqrt{3}a)(x+\sqrt{3}a)$

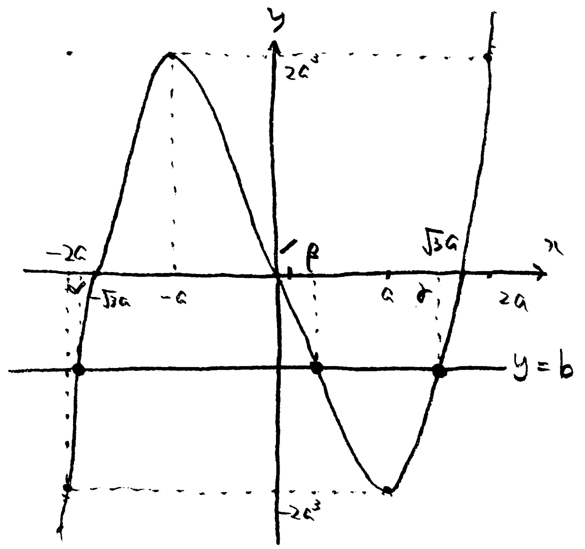
$f'(x) = 3(x+a)(x-a)$

$f(a) = -2a^3$, $f(-a) = 2a^3$

$f(x) = 2a^3 \Leftrightarrow x = -a, 2a$

$f(x) = -2a^3 \Leftrightarrow x = a, -2a$

より，$y=f(x)$のグラフは右のようになる



$f(x) = b$が相異なる3つの実数解をもつのは，$y=f(x)$と$y=b$が右図のように相異なる3点で交わるときで，$-2a^3 < b < 2a^3$ …①

また交点のx座標の小さいものから順にα, β, γとなるので

$-2a < \alpha < -a$，$-a < \beta < a$，$a < \gamma < 2a$

したがって$a \leqq 1$のとき，$\beta < a \leqq 1$となり，$\beta > 1$とはならない．

つまり，aは$a > 1$を満たす …②

$a > 1$のとき$\beta > 1$となるのは，$y=f(x)$のグラフが$-a < x < a$で単調に減少するので$f(\beta) < f(1)$すなわち

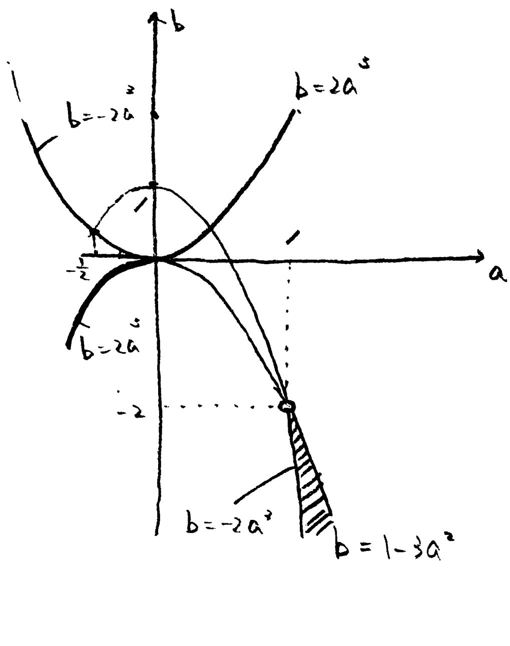
$b < 1-3a^2$ …③

①,②,③より

$b = 1-3a^2$と$b = -2a^3$の交点のa座標は$1-3a^2 = -2a^3$

$\Leftrightarrow (a-1)^2(2a+1) = 0$より$a = 1, -\frac{1}{2}$

以上より右図斜線部（境界除く）



⑤ (1) 接線は iz と平行.

Pが原点に移るように A, Q を $-z$ 平行移動した点を A', $Q'(u')$ とすると

$$A'(1-z), \quad u' = u - z$$

A', Q' を $\arg(iz)$ 逆回転させた点を A'', $Q''(u'')$ とする.

$|iz| = 1$ だから

$$A''\left(\frac{1-z}{iz}\right), \quad u'' = \frac{u'}{iz}$$

となり, A'' と Q'' は実軸について対称なので

$$\overline{\left(\frac{1-z}{iz}\right)} = u''$$

$$\Leftrightarrow \frac{u-z}{iz} = \frac{1-\overline{z}}{-i\overline{z}}$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{1-\overline{z}}{-i\overline{z}}iz + z = z + \frac{z\overline{z} - z}{\overline{z}} = z + z - z^2 = 2z - z^2$$

$(\because z\overline{z} = 1)$

$$\therefore u = \underline{2z - z^2}$$

$$w = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{(z-1)^2} \text{ だから}$$

$$\frac{\overline{w}}{w} = \frac{(z-1)^2}{(\overline{z}-1)^2} = \frac{z^2(z-1)^2}{(1-z)^2} = \underline{z^2}$$

$$\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|} = \left|1 + \frac{\overline{w}}{w} - \frac{1}{w}\right| = \left|1 + z^2 - (z-1)^2\right| = 2|z| = \underline{2}$$

(2) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ $\left(\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi\right)$ とおける.

このとき $1 - z = 1 - \cos\theta + i\sin\theta = 1 - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, i$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$w = \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(\cos(\theta - \pi) + i\sin(\theta - \pi)\right) = X + Yi \text{ とする}$$

$$Y = \frac{-\sin\theta}{4\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}}, \quad X = \frac{-\cos\theta}{4\times\frac{1-\cos\theta}{2}} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2X}{2X-1} \quad \left(X = \frac{1}{2} \text{とすると成立しない}\right)$$

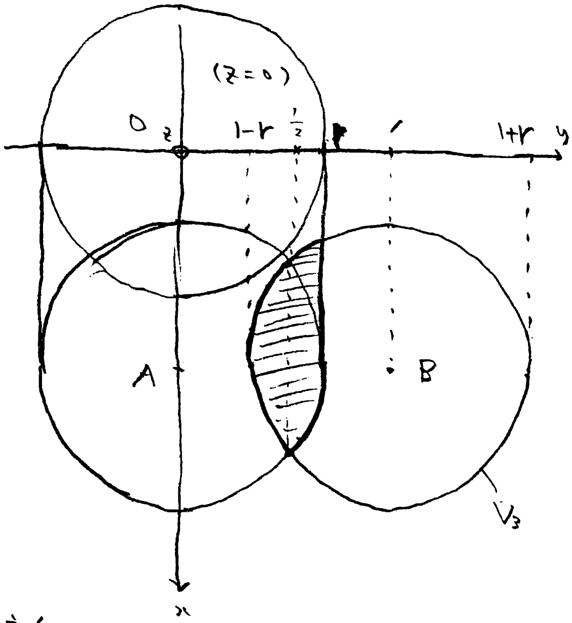
$$\therefore \left(\frac{Y}{X}\right)^2 = \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{(2X-1)^2}{4X^2} - 1 = \frac{-4X+1}{4X^2}$$

$$X = -Y^2 + \frac{1}{4} \quad \cdots$$

⑥ (1) V_1と$z=s$ $(-r \leqq s \leqq r)$との共通部分は $s=0$のとき最も大きくなり.

$z=s$とV_3の共通部分も$s=0$で最大となっていることから. $z=0$の V_1, V_3の共通部分を考える.

共通部分は右図斜線部だから



$1-r \leqq t \leqq r$ のとき

V_1とV_3の共通部分と$y=t$は

共有点をもつ

$x^2+y^2+z^2=r^2$と $y=t$の交線は

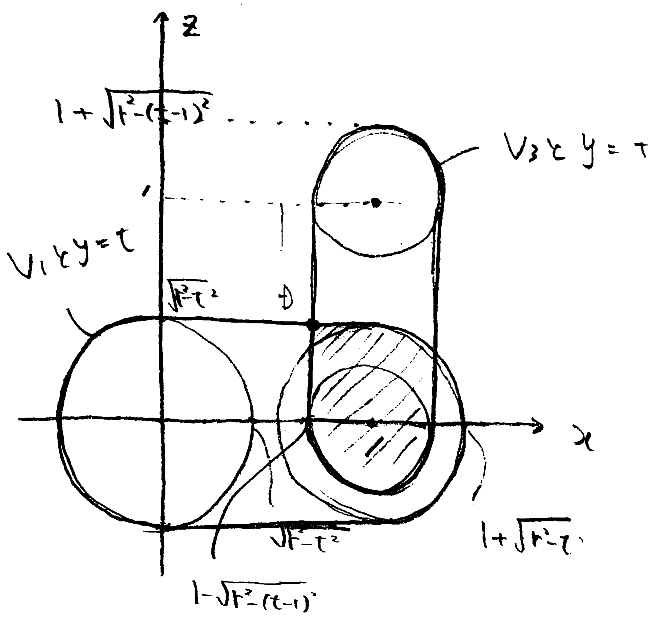
$x^2+z^2=r^2-t^2$

$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=r^2$と$y=t$の交線は.

$(x-1)^2+z^2=r^2-(t-1)^2$ だから.

$y=t$. とV_1 および $y=t$とV_3の共通部分は

次のようになる



(2) V_2と$y=t$の交線は $(x-1)^2+z^2=r^2$ だから

(1)の点D $\left(1-\sqrt{r^2-(t-1)^2},\ t,\ \sqrt{r^2-t^2}\right)$が. この円の中にあればよい