)

(1) $a=2,\ b=3$ なので

$$f_2(x)=f_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-x\right)=\sin\pi\left(\frac{5}{6}-x\right)$$

$$f_3(x)=f_2(-x)=\sin\pi\left(\frac{5}{6}+x\right)$$

$$f_4(x)=f_3\left(\frac{5}{6}-x\right)=\sin\pi\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{6}-x\right)=\sin\pi\left(\frac{5}{3}-x\right)$$

$$f_5(x)=f_4(-x)=\sin\pi\left(\frac{5}{3}+x\right)$$

$$f_5(0)=\sin\frac{5}{3}\pi=\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $n\geqq 2$ のとき、 $f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(1+\frac{1}{6}-x\right)$

$$f_{2n-1}(x)=f_{2n-2}(-x)$$

2式から $f_{2n-1}(x)$ を消去して、

$$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\frac{7}{6}-x\right)=f_{2n-2}\left(x-\frac{7}{6}\right)$$

$$=f_{2n-4}\left(x-\frac{7}{6}\times 2\right)$$

$$=f_{2n-6}\left(x-\frac{7}{6}\times 3\right)$$

$$=\cdots=f_2\left(x-\frac{7}{6}\times(n-1)\right)=f_1\left(\frac{7}{6}-x+\frac{7}{6}(n-1)\right)$$

$$=\sin\pi\left(\frac{7}{6}n-x\right)\qquad(n\geqq 2).$$

ここで $f_2(x)=f_1\left(\frac{7}{6}-x\right)=\sin\pi\left(\frac{7}{6}-x\right)$ であり、これは上式で $n=1$ としたときと一致する。よって、上式は $n=1$ でも成立する。

$x=0$ のとき $f_{2n}(0)=\sin\frac{7}{6}n\pi=\sin\left(\frac{1}{6}n\pi+n\pi\right)=(-1)^n\sin\frac{1}{6}n\pi$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)=\sum_{k=1}^{100}\sin\frac{1}{6}n\pi$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\sin\frac{1}{6}n\pi=\sum_{k=1}^{6}\sin\frac{1}{6}n\pi+\sum_{k=1}^{6}\sin\left(\frac{1}{6}n\pi+\pi\right)=\sum_{k=1}^{6}\sin\frac{1}{6}n\pi-\sum_{k=1}^{6}\sin\frac{1}{6}$

$$=0$$

となり、また、 $\displaystyle\sum_{k=13}^{24}\sin\frac{1}{6}n\pi=\sum_{k=1}^{12}\sin\left(\frac{1}{6}n\pi+2\pi\right)=\sum_{k=1}^{12}\sin\left(\frac{1}{6}n\pi\right)=0$

などとなるので、

$$\sum_{k=1}^{100} \sin \frac{1}{6} n\pi = \sum_{k=1}^{96} \sin\left(\frac{1}{6} n\pi\right) + \sin\frac{1}{6}\pi + \sin\frac{2}{6}\pi + \sin\frac{3}{6}\pi + \sin\frac{4}{6}\pi$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{3}{2} + \sqrt{3}}$$

(3) $f_6(x) = \sin \pi\left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \times 3 - x\right)$ (∵ (2))

$f_6(0) = \sin \dfrac{3\pi(a+b)}{ab}$

これが0となるのは $\dfrac{3(a+b)}{ab}$ が整数となるときである.

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	6	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{15}{4}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{7}{2}$
2	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{21}{10}$	2
3	4	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{2}$
4	$\frac{15}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{5}{4}$
5	$\frac{18}{5}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{10}$
6	$\frac{7}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{10}$	1

$\dfrac{3(a+b)}{ab}$ を表にまとめると左のようになる.

もとめる確率は.

$\therefore \dfrac{8}{36} = \underline{\dfrac{2}{9}}$

②

(1) 相加相乗平均より $x+y=c \geqq 2\sqrt{xy}$ $\quad \sqrt{xy} \leqq \frac{c}{2} \Rightarrow xy \leqq \frac{c^2}{4}$

∴ $\frac{1}{xy} \geqq \frac{4}{c^2}$ (等号は $x=y=\frac{c}{2}$ のとき).

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = 1+\frac{c+1}{xy} \geqq 1+(c+1)\frac{4}{c^2} = \frac{c^2+4c+4}{c^2} = \frac{(c+2)^2}{c^2}$$

等号は ($x=y=\frac{c}{2}$ のとき)

(2)

$x+y=1-z$ となるので

$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$ は $x=y=\frac{1-z}{2}$ のとき最小となる.

また

$$1-\frac{4}{3z} = \frac{3z-4}{3z} < 0 \quad (\because\ 0<z<1)$$

よって, $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$ は $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$ が最小でかつ

$1-\frac{4}{3z}$ が最大となるとき最大となる.

$x=y=\frac{1-z}{2}$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right) \leqq \left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)$$

右辺を $f(z)$ とおく.

$$f'(z) = 2\left(1-\frac{2}{1-z}\right)\times\frac{2}{(1-z)^2}\left(1-\frac{4}{3z}\right) + \left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\times\frac{4}{3z^2}$$

$$= \frac{4(3-z)(2z-3)(2z-1)}{3z^2(1-z)^3}$$

$0<z<1$ における

よって $f(z)$ の増減は右のようになる

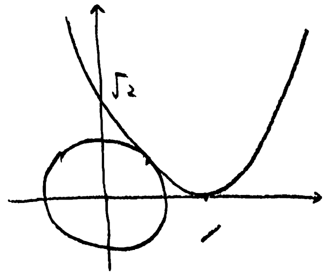
	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$f'(z)$		+	0	−	
$f(z)$		↗		↘	

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{125}{3}$. このとき $x=y=\frac{1}{4}$

∴ $x=y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{2}$ のとき $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$ は最大値 $-\frac{125}{3}$ をとる

③

(1) 放物線上の点 $(t, \sqrt{2}(t-1)^2)$ における法線のうち、原点を通るものをもとめる。



$y' = 2\sqrt{2}(x-1)$

だから、$t \neq 1$ のとき、法線は

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{2}(t-1)}(x-t) + \sqrt{2}(t-1)^2 \quad \cdots ①$$

$t=1$ のときの法線は $x=1$ であり、これが題意を満たさないことは明らか。

① が原点を通るとき、

$$0 = -\frac{-t}{2\sqrt{2}(t-1)} + \sqrt{2}(t-1)^2$$

$$0 = t + 4(t-1)^3$$

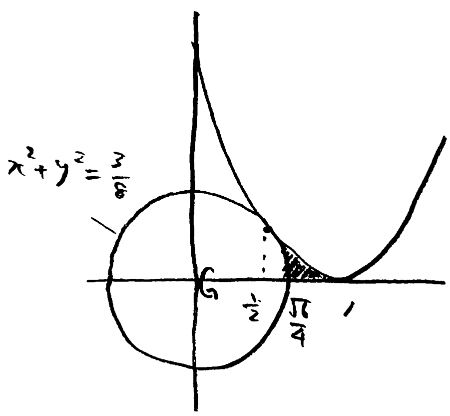
$$4t^3 - 12t^2 + 13t - 4 = 0$$

$$(t-\tfrac{1}{2})(4t^2 - 10t + 8) = 0 \quad \therefore\ t = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{2}(\tfrac{1}{2}-1)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ における法線が原点を通ることになり、このとき $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ において円と放物線の接線は一致している。原点から $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ までの距離は $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{4})^2} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

以上より、 $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{\sqrt{2}}{4},\ r = \frac{\sqrt{6}}{4}$

(2) 体積をVとする。



$$V = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \pi \{\sqrt{2}(x-1)^2\}^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \pi y^2 dx$$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x-1)^4 dx - \pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \frac{3}{8} - x^2 dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{5}(x-1)^5\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \pi\left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{1}{80}\pi - \frac{3\sqrt{6}}{32}\pi + \frac{\sqrt{6}}{32}\pi + \frac{3}{16}\pi - \frac{1}{24}\pi$$

$$= \frac{19}{120}\pi - \frac{\sqrt{6}}{16}\pi$$

④

(1)

$2^N A_n \cdot \frac{1}{k} = a_k$ とおく．（$k=1,2,3\cdots n$）

(i) kが奇数ならば，A_nが n以下の全ての奇数の積だから，$A_n\frac{1}{k}$は整数であり

a_kは2^Nの倍数．

(ii) kが偶数のとき，$k \leqq n < 2^{N+1}$ だから，kは2^N以下の2の倍数と

奇数からなる合成数で，そのうち2^Nの倍数となっているものは，2^Nのみ．

したがって，a_kのうち，a_{2^N}のみが奇数で 他は全て偶数．

(i)(ii)より

$$a_k \equiv 0 \pmod 2 \quad (k \neq 2^N のとき)$$
$$a_k \equiv 1 \pmod 2 \quad (k = 2^N 〃)$$

となるので，

$$2^N A_n S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \equiv 1 \pmod 2.$$

となり，$2^N A_n S_n$は奇数の整数である．

(2) $2^N A_n S_n = p_n$ とおく（p_nは奇数の整数）

$$S_n = \frac{p_n}{2^N A_n}$$

となるが このとき 分子は奇数なので，右辺の分母は2^Nの倍数となっている

したがって $S_n = 2 + \frac{m}{2^2 \cdot 5}$ となるためには $N \leqq 2$であることが必要であり，

すなわち，$n < 2^3 = 8$ であることが必要．

$n=3$のとき $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} < 2$ なので $n \geqq 4$．

$n=4$のとき $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = 2+\frac{1}{12} = 2+\frac{m}{20}$ となるのは $m=\frac{5}{3}$

これはmが整数であることに矛盾している．

$n=5$ のとき $S_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{5} = 2+\frac{17}{60} = 2+\frac{m}{20}$ $m=\frac{17}{30}$ となり不適

$n=6$ のとき $S_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{6} = 2+\frac{27}{60} = 2+\frac{m}{20}$ $\quad m=9$

$\therefore (n, m) = (6.9)$

$n=7$ のとき $S_n = 1+\cdots+\frac{1}{7} = 2+\frac{249}{420} = 2+\frac{m}{20}$ $\quad m = \frac{249}{21} = \frac{83}{7}$

不適.

$\therefore \underline{(n.m) = (6.9)}$

(3) $20 < 2^5$ だから (1) より $2^4 A_{20} S_{20}$ は正の奇数.

$$2^4 A_{20} S_{20} \equiv r \pmod{2^4}$$

とおくと. ($0 \leqq r \leqq 19$ で r は奇数)

$$b = \frac{r}{2^4}$$

$$A_{20} S_{20} = A_{20}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$$

$$= A_{20}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{19}\right) + A_{20}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$$

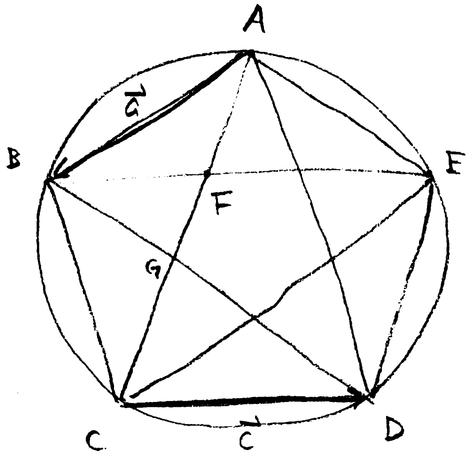
$$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{A_{20}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{19}\right)} + \frac{1}{2}A_{20} S_{10}$$

〰 部は整数であり.

$$2^4 \times \frac{1}{2} A_{20} S_{10} = 2^3 A_{20} S_{10}$$

$$= 2^3 A_{20}\left(S_6 + \frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)$$

$$= 2^3 A_{20}\left(2+\frac{9}{20}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)$$



⑤

(1) 図のようにF, Gを定める

$$\angle ABC = \frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ$$

$$\angle BAC = \angle BCA = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$$

同様に $\angle ABE = 36^\circ$.

よって $\triangle ABC \sim \triangle AFB$.

$$\angle CBF = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

$$\angle CFB = \angle ABF + \angle FAB = 72^\circ.$$

よって $\triangle CBF$ は $CB = CF$ の二等辺三角形.

以上より

$$AB : AC = AF : AB$$

$$x : y = y - x : x$$

$$x^2 = y(y - x)$$

証明終

(2) 正五角形の対称性より $\overrightarrow{BE} \parallel \overrightarrow{CD}$ かつ $|\overrightarrow{BE}| = |\overrightarrow{AC}|$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{y}{x}\vec{c},$$

同様に $\overrightarrow{EC} = \frac{y}{x}\vec{a}$.

よって $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = \underline{\frac{y}{x}(\vec{c} + \vec{a})}$

(3) $$FG = AC - AF - GC = y - 2 \cdot x \cdot \frac{x}{y} = \frac{y^2 - 2x^2}{y}$$

(1)より $y^2 - xy - x^2 = 0$ $\quad y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x \quad (\because y > 0)$

$$\therefore FG = \frac{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}x^2 - 2x^2}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \frac{(3+\sqrt{5}-4)x^2}{(1+\sqrt{5})x} = \underline{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}$$

(4) $$S_n = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 S_{n-1} = \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) S_{n-1}$$

$$\therefore S_n = S_1 \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k = \sum_{k=1}^{n} S_1 \left(\frac{3\sqrt{5}-7}{2}\right)^{k-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3\sqrt{5}-7}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{3\sqrt{5}-7}{2}} \qquad \left(\because \quad \left|\frac{3\sqrt{5}-7}{2}\right| < 1\right.$$

$$= \underline{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$$