①

(1) $\int_0^n f_n(x)\,dx$ について $x = nt$ とおくと

$\dfrac{dx}{dt} = n$,

x	$0 \to n$
t	$0 \to 1$

$$\int_0^n f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{nt}{1+nt}\log(1+t)\,dt$$

ここで $0 \leqq t \leqq 1$ のとき、$\dfrac{nt}{1+nt} \leqq 1$ となるので、

$$\int_0^1 \frac{nt}{1+nt}\log(1+t)\,dt \leqq \int_0^1 \log(1+t)\,dt = \int_0^1 \log(1+x)\,dx$$

よって $\int_0^n f_n(x) \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$ が成立する。

(2)
$$I_n = \int_0^n f_n(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{nx}{1+nx}\log(1+x)\,dx \quad (\because (1)\text{の計算途中の式})$$
$$= \int_0^1 \log(1+x)\,dx - \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x)\,dx$$
$$= \Big[(x+1)\log(x+1) - x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x)\,dx$$
$$= 2\log 2 - 1 - \underline{\int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x)\,dx}$$

ここで ～ 部について(これを J_n とする)

$\dfrac{1}{1+nx}$, $\log(1+x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ の区間で負ではないので、

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{1}{1+nx}\log(1+x)\,dx = J_n \leqq \log 2\int_0^1 \frac{1}{1+nx}\,dx \quad (\because \log(1+x) \leqq \text{l}$$

$$= \log 2\left[\frac{1}{n}\log(1+nx)\right]_0^1 = \frac{1}{n}\log 2 \times \log(1+n).$$

$$= \log 2 \times \frac{\log(n+1)}{n+1} \times \frac{n+1}{n}$$

$$= \log 2 \times \left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{\log(n+1)}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(\log 2)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\log(n+1)}{n+1}\right)\right\} = (\log 2) \times 1 \times 0 = 0$$

よって はさみうちの原理より、

$$\lim_{n\to\infty} J_n = 0$$

よって $\lim_{n\to\infty} I_n = \underline{2\log 2 - 1}$ //

②

$x=\cos\theta,\ y=\cos\varphi$ とおく.

$$x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$
$$=\cos^2\theta+\cos^2\varphi-2\cos^2\theta\cos^2\varphi+2\cos\theta\cos\varphi\sqrt{\sin^2\theta}\sqrt{\sin^2\varphi}$$
$$=\cos^2\theta+\cos^2\varphi-2\cos^2\theta\cos^2\varphi+2\cos\theta\cos\varphi|\sin\theta\sin\varphi|$$
$$=(\cos^2\theta-\cos^2\varphi)^2-\cos^4\theta-\cos^4\varphi+\cos^2\theta+\cos^2\varphi+2\cos\theta\cos\varphi|\sin\theta\sin\varphi|$$
$$=(\cos^2\theta-\cos^2\varphi)^2+\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+\cos^2\varphi(1-\cos^2\varphi)+2\cos\theta\cos\varphi|\sin\theta\sin\varphi|$$
$$=(\cos^2\theta-\cos^2\varphi)^2+\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^2\varphi\sin^2\varphi\pm2\cos\theta\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi$$
$$=(\cos^2\theta-\cos^2\varphi)^2+(\cos\theta\sin\theta\pm\cos\varphi\sin\varphi)^2$$
$$=\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin2\theta\pm\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}(\cos2\theta-\cos2\varphi)^2+\frac{1}{4}(\sin2\theta\pm\sin2\varphi)^2$$
$$=\frac{1}{4}\left\{(\cos2\theta-\cos2\varphi)^2+(\sin2\theta\pm\sin2\varphi)^2\right\}$$

上式の{ }内は2点 $(\cos2\theta,\sin2\theta)$, $(\cos2\varphi,\mp\sin2\varphi)$ との
きょりの2乗を表しているが、この2点は半径1の円周上の点なので、
その距離の最大値は、半径1の円の直径2である.
また{ }内は平方の和なので正の値をとる.

よって

$$0\leqq\frac{1}{4}\left\{(\cos2\theta-\cos2\varphi)^2+(\sin2\theta\pm\sin\varphi)^2\right\}\leqq\frac{1}{4}\times2^2=1.$$

$\therefore\ 0\leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\leqq1$ が成立する

② (別解)

$x=\cos\theta,\ y=\cos\varphi$ とおく

$x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

$=\cos^2\theta+\cos^2\varphi-2\cos^2\theta\cos^2\varphi+2\cos\theta\cos\varphi\sqrt{1-\cos^2\theta}\sqrt{1-\cos^2\varphi}$

$=\cos^2\theta+\cos^2\varphi-2\cos^2\theta\cos^2\varphi+2\cos\theta\cos\varphi\,|\sin\theta\sin\varphi|$ …①

$\sin\theta\sin\varphi\geqq 0$ のとき

$① = \frac{1}{2}(1+\cos2\theta)+\frac{1}{2}(1+\cos2\varphi)-2\times\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)\times\frac{1}{2}(1+\cos2\varphi)$

$\quad +2\times\frac{1}{2}\sin2\theta\times\frac{1}{2}\sin2\varphi$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta\cos2\varphi+\frac{1}{2}\sin2\theta\sin2\varphi$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta+2\varphi)$ …②

$-1\leqq\cos(2\theta+2\varphi)\leqq 1$ だから ② は $0\leqq$ ② $\leqq 1$ を満たす.

$\sin\theta\sin\varphi<0$ のとき

$① = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta\cos2\varphi-\frac{1}{2}\sin2\theta\sin2\varphi$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta-2\varphi)$ …③

$-1\leqq\cos(2\theta-2\varphi)\leqq 1$ だから $0\leqq$ ③ $\leqq 1$

以上より、題意は成立する

③

(1) $\sqrt{2}$が有理数であると仮定する。

このとき互いに素な自然数 m, n を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

と表すことができる。

両辺を2乗して

$$2 = \frac{n^2}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 = n^2$$

ここで、m, n は互いに素だから、n は2を素因数にもつ必要がある。

$n = 2n'$ （n'は自然数）とすると、

$$2m^2 = 4n'^2$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 = 2n'^2$$

ここで、m は2を素因数に持つことが必要となるが、これは、m, n が互いに素であることに矛盾する

よって $\sqrt{2}$ は無理数である。

同様に $\sqrt[3]{3}$ が有理数だと仮定すると

$$\sqrt[3]{3} = \frac{q}{p} \quad （p, q は互いに素な自然数）$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 = \frac{q^3}{p^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3p^3 = q^3$$

q は3を素因数に持ち $q = 3q'$ （q'は自然数）

$$3p^3 = 27q'^3$$

$$p^3 = 3^2q'^3$$

p は3を素因数をもつことになるが、p, q は互いに素であることに矛盾する。

よって $\sqrt[3]{3}$ は無理数である。

(2) $\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q=r$ とする（rは有理数）

$$\sqrt[3]{3}q=r-\sqrt{2}p \quad \cdots ①$$

両辺を3乗する

$$3q^3=r^3-3\sqrt{2}r^2p+6rp^2-2\sqrt{2}p$$

$$\sqrt{2}p(3r^2+2)=r^3+6rp^2-3q^2 \quad \cdots$$

ここで $p(3r^2+2)\neq 0$ とすると、$\sqrt{2}$が有理数となってしまうので、

$p(3r^2+2)=0$ すなわち $p=0$ であることが必要。

このとき ①は

$$\sqrt[3]{3}q=r$$

となるが、ここで $q\neq 0$ とすると $\sqrt[3]{3}=\dfrac{r}{q}$ となるが、右辺は

有理数なので、$\sqrt[3]{3}$が無理数であることに矛盾する。

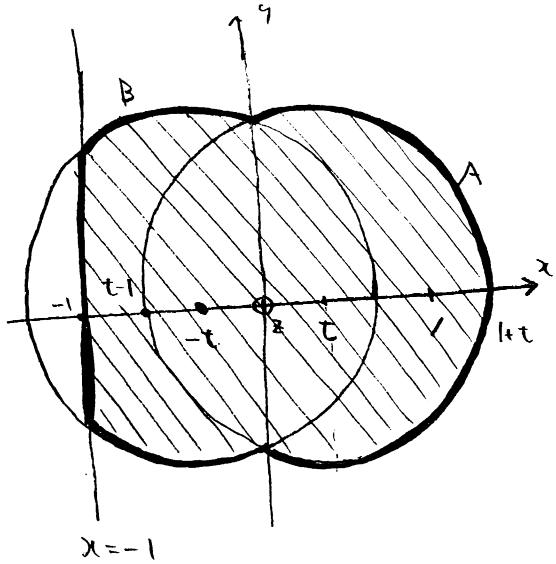
よって $q=0$、となり、このとき、$r=0$。

以上より

p、q、$\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとき $p=q=0$ となる。

④

(1)



Aとxy平面の交わる図形は

$$(x-t)^2+y^2=1$$

Bとxy平面の交わる図形は、

$$(x+t)^2+y^2=1$$

これとx=-1の3つの曲線で囲まれる右図の斜線部をx軸について回転させた図形の体積がV(t)となる。

$$V(t)=\pi\int_{-1}^{0}y_B^2\,dx+\pi\int_{0}^{1+t}y_A^2\,dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{0}1-(x+t)^2\,dx+\pi\int_{0}^{1+t}1-(x-t)^2\,dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{1}{3}(x+t)^3\right]_{-1}^{0}+\pi\left[x-\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_{0}^{1+t}$$

$$=\pi\left(0-\frac{1}{3}t^3+1+\frac{1}{3}(t-1)^3+1+t-\frac{1}{3}-0-\frac{1}{3}t^3\right)$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{3}t^3-t^2+2t+\frac{4}{3}\right)=\underline{-\frac{1}{3}\pi\left(t^3+3t^2-6t-4\right)}$$

(2) $\frac{dV}{dt}=-\pi t^2-2\pi t+2\pi=-\pi\left(t^2+2t-2\right)$

$\frac{dV}{dt}=0$となるのは $t^2+2t-2=0 \Leftrightarrow t=-1\pm\sqrt{1+2}=-1\pm\sqrt{3}$

$0\leqq t\leqq 1$の範囲にあるのは $t=\sqrt{3}-1$

$0\leqq t\leqq 1$の区間での$V(t)$の増減は右のようになる

t	0	$\cdots$	$\sqrt{3}-1$	$\cdots$	1
$\frac{dV}{dt}$	$+2\pi$	$+$	0	$-$	π
$V(t)$		↗		↘	

よって $V(t)$ は $t=\sqrt{3}-1$ のとき最大となる。

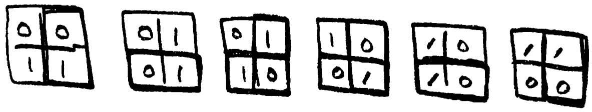
$V(t) = -\frac{1}{3}\pi\left\{(t+1)(t^2+2t-2)-6t-2\right\}$ となるので

$V(\sqrt{3}-1) = -\frac{1}{3}\pi\left(-6\sqrt{3}+6-2\right) = \underline{\frac{(6\sqrt{3}-4)\pi}{3}}$

⑤

(1) 数学的帰納法で示す.

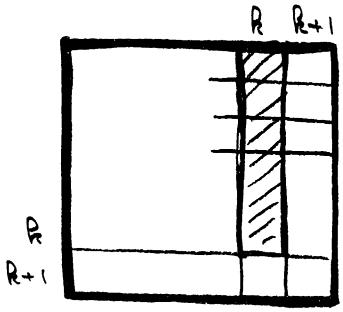
(i) n=2のとき、正方形は



の6通りが考えられるが、すべて0と1の交互の部分があるので題意を満たす。

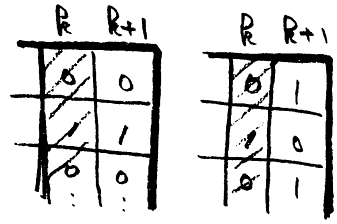
(ii) n=kのとき k×kマスのk行またはk列に0と1の交互に現れる部分があると仮定する.

(a) k列に現れているとき.



右図斜線内が 0 1 0 1 0 1… となっているとき、

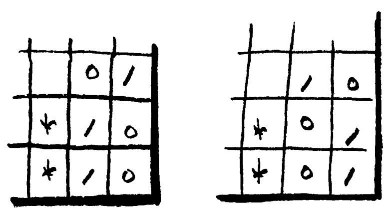
k+1列の第1行から第k行までは 0, 1, 0, 1… または 1, 0, 1, 0 … となる.



① ②

①のとき 第k行の k列, k+1列は同じ数となるので k+1行は k行と異なる数となり、k+1列が 0と1と交互に埋められる。

②で k+1行が k行と同じ数で埋められたとすると(右図③または④)



③ ④

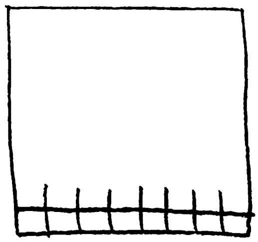
このとき k−1列の下2行(*の部分)は k列と異なる数で埋められ (③なら0, ④なら1)るので、以下k−2列, …と同様に埋められ、第k+1行は0と1で交互に埋められる.

(b) k行に現れているとき.

このときも(a)と同様に考えれば、k+1行目またはk+1列目に0と1と交互に現れる部分がある.

(i)(ii)より 数学的帰納法によって題意は示された.

(2) (i) 第n行のみ交互に並ぶとき



第n行の並べ方は

0,1,0,1,....

1,0,1,0...　　の2通り

第n-1行の並べ方は

第n-1行1列が0または1で、他は必然的に決まるので　2通り

以下 n-2, n-3 ... 1行まで同じなので

並べ方は 2^n 通り

この中に、n-1列も交互に並ぶものが

2通り (n行n列が0または1で他は全て必然的に定まる) あるので

$$2^n-2.$$

(ii) 第n列のみが交互に並ぶとき

同様に 2^n-2.

(iii) 第n行も第n列も交互に並ぶのは　2通り (∵(i))

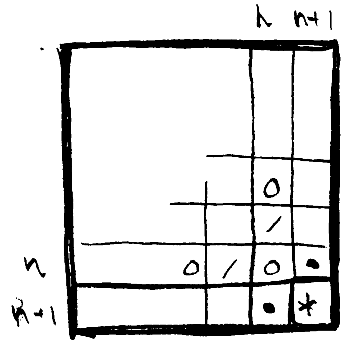
(i)(ii)(iii)より　$(2^n-2)\times 2+2 = \underline{2^{n+1}-2}$ 通り

(2) 第n行と第n列のいずれもが0と1とで交互に埋められているものを

b_n, そうでないものを c_n とする。 $(a_n = b_n + c_n)$

まず b_n について考える。

(1)より $b_2 = 2$.



⑤

右図で *の部分が、n行n列と同じときだけ

ついて、n+1行およびn+1列を

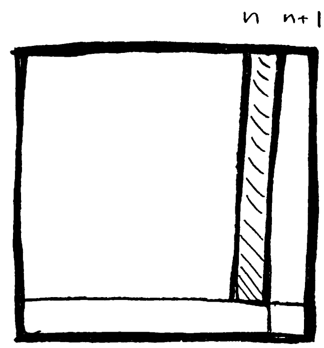
0と1で交互に埋める方法がある

$$b_{n+1} = b_n$$

よって $b_n = b_2 = 2$.

次に c_n について。

(1)より $c_2 = 4$.



⑥

(i) n×nのマスの第n列(右図斜線部)だけ

が交互だとすると、n+1列は①または②

の埋め方があり、(1)より①のときは

n+1行の埋め方は1通りに定まり

②のときは n+1行は③または④の

2通りの埋め方がある。

また、n×nマスが、第n行、n列、いずれも0,1と交互に埋められているとき(⑤のとき)は、⑤の*が、n行n列と異なる数で埋められているとき(⑤図なら1)に限られる。このとき ●の2ヶ所の決め方は2通りある。

以上より

$$c_{n+1} = 2c_n + 2b_n = 2c_n + 4$$

$$c_{n+1} + 4 = 2(c_n + 4)$$

$$\therefore\ c_n + 4 = 2^{n-1}(c_1 + 4) = 2^{n+2}.$$

$$\therefore\ c_n = 2^{n+1} - 4. \qquad \therefore\ a_n = b_n + c_n = 2^{n+1} - 2$$