1

(1) $f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$

$f'(x) = \cos x - 2nx + \frac{1}{3}x^2$

$f''(x) = -\sin x - 2n + \frac{2}{3}x$

$f'''(x) = -\cos x + \frac{2}{3}$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $f'''(x) = 0$ となるxは唯1つ存在する。(これをαとする)

このとき $f''(x)$ の増減は右のようになり

$x = \alpha$ のとき $f''(x)$ は最小となる

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f''(0) = 0 - 2n - 0 = -2n < 0$

$f''(\frac{\pi}{2}) = 0 - 2n + \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{2} < -2 \times 1 + \frac{1}{3} \times 4 = -\frac{2}{3} < 0$

だから $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $f''(0) < 0$ が成り立つ。

証明終

(2) (1)より $f''(x)$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において必ず負なので $f'(x)$ は単調に減少する

$f'(0) = 1 - 0 + 0 = 1$, $f'(\frac{\pi}{2}) = 0 - n\pi + \frac{1}{3}(\frac{\pi}{2})^2 < -1 \times 3 + \frac{1}{3} \times (\frac{4}{2})^2 = -\frac{5}{3} < 0$

よって $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $f'(x) = 0$ となるxが唯1つ存在する。(これをβとする)

$f'(\beta) = 0$ だから $\cos\beta - 2n\beta + \frac{1}{3}\beta^2 = 0$ …①

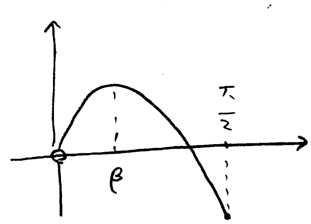
$f(x)$の増減は右のようになる

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(0) = 0 - 0 + 0 = 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi^2}{4} \times n + \frac{1}{9}(\frac{\pi}{2})^3 < 1 - \frac{3^2}{4} \times 1 + \frac{1}{9} \times (\frac{4}{2})^3$

$= 1 - \frac{9}{4} + \frac{8}{9} = -\frac{13}{36} < 0$



よって $f(x)$の概形は右のようになり、

$y = f(x)$ のグラフは $\beta < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で x軸と1度だけ交わる。

∴ $f(x) = 0$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において解をただ1つもつ。

(3)

$$f(x_n) = \sin x_n - n x_n^2 + \frac{1}{9} x_n^3 = 0.$$

$$x_n^2 = \frac{9}{9n - x_n} \sin x_n$$

ここで、$0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ だから、上式より

$$0 < x_n^2 = \frac{9}{9n - x_n} \sin x_n < \frac{9}{9n - \frac{\pi}{2}} \times 1 = \frac{18}{18n - \pi}$$

$\lim_{n \to \infty} \frac{18}{18n - \pi} = 0$ なので、はさみうちの原理より、$\lim_{n \to \infty} x_n^2 = 0.$

よって $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

証明終

$f(x_n) = 0$ より $\quad n x_n = \frac{\sin x_n - \frac{1}{9} x_n^3}{x_n}$

$$\lim_{n \to \infty} n x_n = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{\sin x_n}{x_n} - \frac{1}{9} \times x_n^2 \right\} = \underline{1} \quad \left(\because \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \right).$$

②

(1)

$$左辺 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-e^{-x})^k - \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{1-(-e^{-x})^{n+1}}{1-(-e^{-x})} \times 1 - \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (\because -e^{-x} < 0 \text{ より } -e^{-x} \neq 1)$$

$$= \frac{-(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

$$= 右辺$$

証明終

(2). (1)の両辺を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で積分する

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-kx} \right) dx - \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \left\{ (-1)^k \int_0^1 e^{-kx} dx \right\} - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \left\{ (-1)^k \left[-\frac{1}{k} e^{-kx} \right]_0^1 \right\} - \left[\log(1+e^x) \right]_0^1 = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (e^{-k} - 1)}{k} - \log \frac{1+e}{2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

これと題意の関係式を比較して. $S = \log\left(\frac{e+1}{2}\right)$

(3) $0 < x < 1$ において. $e^{-1} < e^{-x} < e^0 = 1$ だから

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{1+e^{-x}} < 1$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx \leqq \int_0^1 e^{-(n+1)x}dx = \left[-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x}\right]_0^1$$

$$= -\frac{e^{-n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - \log\frac{e+1}{2}\right| = \left|\lim_{n\to\infty}(-1)^n\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\right|$$

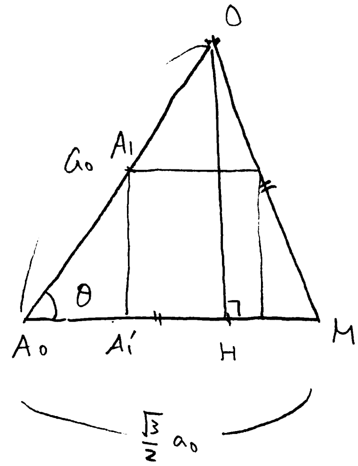
$$\leqq \lim_{n\to\infty}(-1)^n \times \frac{1}{n+1} = 0$$

よって、はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - \log\frac{e+1}{2}\right) = 0$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} = \underline{\log\frac{e+1}{2}}$$

③

(1) 正四面体の対称性より、
Hは $\triangle A_0B_0C_0$ の重心である
よって O, A_0, H を含む平面による正四面体 $OA_0B_0C_0$ の断面は右のようになる



B_0C_0 の中点を M として、

$A_0M : A_0B_0 = \sqrt{3} : 2$ だから $A_0M = \frac{\sqrt{3}}{2}a_0$

$A_0H : HM = 2 : 1$ より $A_0H = \frac{\sqrt{3}}{3}a_0$

$$OH = \sqrt{OA_0^2 - A_0H^2} = \sqrt{a_0^2 - \frac{1}{3}a_0^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a_0$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{A_0H}{OA_0} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}, \quad \sin\theta = \frac{OH}{OA_0} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

(2) $OA_1B_1C_1$ も正四面体なので、$OA_1 = a_1$

$$A_1A_1' = A_0A_1 \times \sin\theta = (a_0 - a_1) \times \frac{\sqrt{6}}{3}$$

これも長さが a_1 となるので、 $(a_0 - a_1) \times \frac{\sqrt{6}}{3} = a_1$

これを整理して、 $\underline{a_1 = (\sqrt{6} - 2)a_0}$

(3)
$$V_1 = \frac{1}{2}a_1 \times a_1 \times \sin 60^\circ \times a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a_1^3 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6} - 2)^3 a_0^3$$

四面体 $OA_0B_0C_0$ と $OA_1B_1C_1$ の相似比は $1 : \sqrt{6} - 2$ で、同様に

$OA_nB_nC_n$ と $OA_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ の相似比も $1 : \sqrt{6} - 2$

したがって、V_n と V_{n+1} の体積比は $1 : (\sqrt{6} - 2)^3$

よって
$$V_n = V_1 \times (\sqrt{6} - 2)^{3(n-1)} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6} - 2)^{3n} a_0^3$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6} - 2)^3 a_0^3 \times \frac{1}{1 - (\sqrt{6} - 2)^3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(18\sqrt{6} - 44) \times \frac{a_0^3}{45 - 18\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(9\sqrt{6} - 22) \times \frac{1}{9}(5 + 2\sqrt{6})a_0^3 = \underline{\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{18}a_0^3}$$

④

(1) P_2 が x 軸上にあるとき，その y, z の成分は 0.

$\vec{v_1}$ ～ $\vec{v_4}$ のうち，和の y, z 成分が 0 となるのは $\vec{v_1}+\vec{v_2}$，$\vec{v_3}+\vec{v_4}$

の2通り．順序を考えると，さいころの目の出方は

$(1,2)$, $(2,1)$, $(3,4)$, $(4,3)$

の4通りで，その確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 4 = \frac{1}{4}$$

(2) P_2 が y 軸，z 軸にあるのは，それぞれ $\frac{1}{4}$ の確率となる

他に

$(1,1)$ のとき $\overrightarrow{P_0P_2}=(2,2,2)$

$(2,2)$ 〃 $\overrightarrow{P_0P_2}=(2,-2,-2)$

$(3,3)$ 〃 $\overrightarrow{P_0P_2}=(-2,2,-2)$

$(4,4)$ 〃 $\overrightarrow{P_0P_2}=(-2,-2,2)$

確率は全て $\frac{1}{16}$ …(＊)

$\overrightarrow{P_2P_4}$ についても同様．

$\overrightarrow{P_0P_2} \perp \overrightarrow{P_2P_4}$ となるのは，P_2 が x 軸上にあるときは $\overrightarrow{P_2P_4}$ が y 軸または z 軸と平行となるときで，その確率は $\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$.

P_2 が y, z 軸上にあるときも同様．

(＊)のときは，$\overrightarrow{P_0P_2} \perp \overrightarrow{P_2P_4}$ となる組み合わせは存在しない．

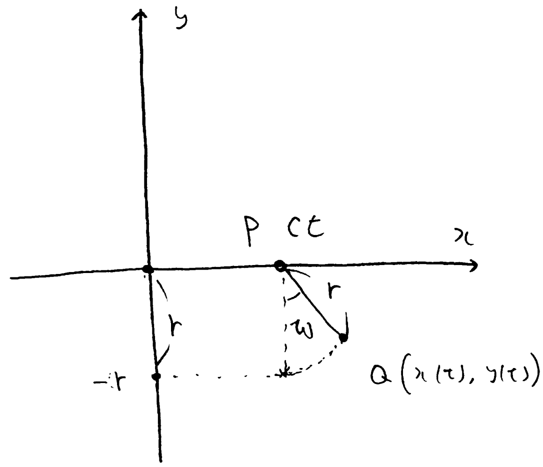
以上より

$$\frac{1}{8}\times 3 = \frac{3}{8}$$

⑤

(1) $t=0$ のとき

Pから見て Qは 距離 r, 偏角 $\frac{3}{2}\pi$ の位置にある.



時刻 t のとき

Pから見て Qは 距離 r, 偏角 $\frac{3}{2}\pi+\omega t$ の位置にあるので、

$$\overrightarrow{PQ} = \left(r\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\omega t\right),\ r\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\omega t\right)\right)$$

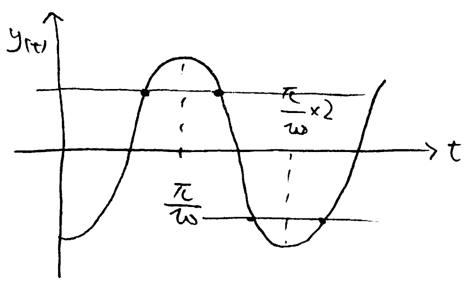
Pは $(ct, 0)$ にあるので

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = (ct, 0) + (r\sin\omega t, -r\cos\omega t)$$

$$Q\left(ct + r\sin\omega t,\ -r\cos\omega t\right)$$

$$\underline{x(t) = ct + r\sin\omega t,\quad y(t) = -r\cos\omega t}$$ //

(2) $y(t)$ のグラフは下のようになる



これより $y(t_1) = y(t_2)$ となる t_1, t_2 で $t_1 < t_2$ を満たし, $t_2 - t_1$ が最小となる t_1, t_2 を考えると $t_1 + t_2 = \frac{\pi}{\omega} \times 2n$ となる.

このとき

$$x(t_2) = c\left(\frac{\pi}{\omega}\times 2n - t_1\right) + r\sin(2n\pi - t_1)$$

$$= c\left(\frac{\pi}{\omega}\times 2n - t_1\right) - r\sin t_1$$