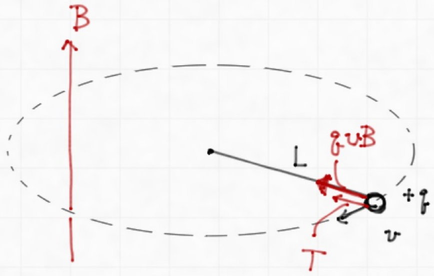
早稲田大学2022理工

1 問1 (1) $qvB_0+T=M\frac{v^2}{L}$ より $T=M\frac{v^2}{L}-qvB_0\geqq 0$



等号成立のとき $v=v_0$ だから $v_0=\frac{qB_0L}{M}$ **b**

(2) $\omega_0=\frac{v_0}{L}=\frac{qB_0}{M}=\frac{1.6\times10^{-19}\times1.0}{1.7\times10^{-27}}=\frac{1.6}{1.7}\times10^{8}=9.4\times10^{7}$ **e**

(3) $t>0$ のとき軌道に生じる誘導電場の大きさは

$$E=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\times\frac{1}{2\pi L}=\frac{1}{2\pi L}\times\pi L^2\frac{\Delta B}{\Delta t}=\frac{1}{2}LB_0k \quad \textbf{a}$$

(4) 接線方向の運動方程式

$Ma=qE$ より $a=\frac{q}{M}\times\frac{1}{2}LB_0k=\frac{kqLB_0}{2M}=\frac{k}{2}v_0$ **f**

問2 (5) $T=M\frac{v^2}{L}-qvB=\frac{M}{L}\left(3v_0+\frac{k}{2}v_0t\right)^2-q\left(3v_0+\frac{k}{2}v_0t\right)B_0(1+kt)$

(1)より $\frac{M}{L}=\frac{qB_0}{v_0}$ を代入

$$T=qB_0v_0\left(9+3kt+\frac{1}{4}k^2t^2\right)-qB_0v_0\left(3+\frac{7}{2}kt+\frac{1}{2}k^2t^2\right)$$
$$=qB_0v_0\left(6-\frac{1}{2}kt-\frac{1}{4}k^2t^2\right) \quad \textbf{d}$$

(6) $T=0$ となる時刻をもとめる。$k^2t^2+2kt-24=0$ を解いて $t=\frac{4}{k},-\frac{6}{k}$ $t>0$ だから $t=\frac{4}{k}$ **h**

問3 (7) 電子が受ける力の大きさは $er\omega B_0$ (中心向き)だから中心Oから周辺部まで運ぶのに要する仕事は $\int_0^L er\omega B_0\,dr=e\omega B_0\times\frac{1}{2}L^2$ (J) $=eV$ より $V=\frac{1}{2}\omega B_0L^2$ **c**

(8) $V_{OP}=\frac{1}{2}\omega B_0L^2=\frac{1}{2}\times10^2\times1.0\times0.1^2=0.5$ (V) **g**

(9) 1周にかかる時間は $\frac{2\pi}{\omega}$ だから発生するジュール熱は $\frac{V^2}{R}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi\omega B_0^2L^4}{2R}$ **e**

問4 (10) 電子が受ける力の大きさは ($0\leqq r<\frac{L}{2}$ のとき) $er\omega B_0$ ($r\geqq\frac{L}{2}$ のとき) $e\cancel{r}\omega B_0\times\frac{L}{2\cancel{r}}=\frac{1}{2}e\omega B_0L$

中心Oから周辺部まで運ぶのに要する仕事は

$$\int_0^{\frac{L}{2}} er\omega B_0\,dr+\int_{\frac{L}{2}}^{L}\frac{1}{2}e\omega B_0L\,dr=e\omega B_0\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{\frac{L}{2}}+\frac{1}{2}e\omega B_0L\left(L-\frac{L}{2}\right)=\frac{3}{8}e\omega B_0L^2=eV$$

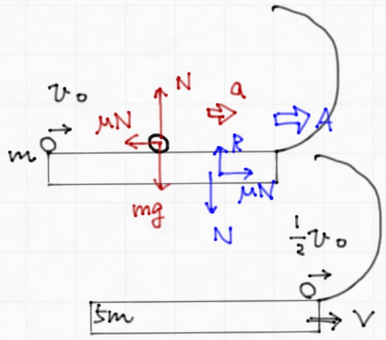
$V=\frac{3}{8}\omega B_0L^2$ **c**

(11) $V=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ より $\Delta\Phi=\frac{3}{8}\omega B_0L^2\Delta t$ **c**

(12) $\Delta\Phi_1=\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2\times\frac{\omega\Delta t}{2\pi}B_0=\frac{1}{8}\omega B_0L^2\Delta t$ **e**

(13) $\Delta\Phi_2=\Delta\Phi-\Delta\Phi_1=\frac{1}{4}\omega B_0L^2\Delta t$ **a**

2



問1 台の加速度をA などとする(右図)

物体: $ma = -\mu N$, $N = mg$

台 : $5mA = \mu N$

$A = -\frac{1}{5}a$ $a<0$ だから 向きは **右向き**

問2 運動量保存

$$mv_0 = m\cdot\frac{1}{2}v_0 + 5mV \qquad V = \frac{1}{10}v_0$$

エネルギー変化 = 仕事の関係を用いると

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 5m\left(\frac{1}{10}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mgl$$

$$-\frac{7}{20}mv_0^2 = -\mu mgl$$

$$\mu = \frac{7v_0^2}{20gl}$$

問3 $a = -\frac{\mu mg}{m} = -\mu g$

t秒後の物体の(床に対する)速度 v および位置 x は

$$v = v_0 - \mu g t, \quad x = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2$$

台の速度 V および位置 X

$$V = \frac{1}{5}\mu g t, \quad X = \frac{1}{2}\frac{1}{5}\mu g t^2$$

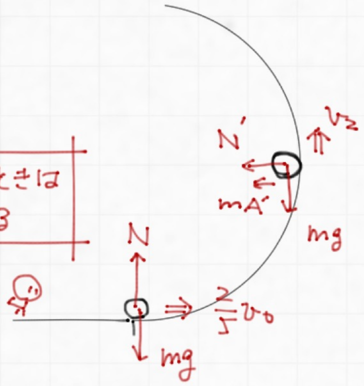
$v = \frac{1}{2}v_0$ のとき $t = \frac{v_0}{2\mu g}$ で、このとき $x = \frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{v_0^2}{8\mu g} = \frac{3v_0^2}{8\mu g}$

$$X = \frac{1}{10}\cancel{\mu g}\cdot\frac{v_0^2}{4\mu^{\cancel{2}}g^{\cancel{2}}} = \frac{v_0^2}{40\mu g}$$

$x - X = \frac{\cancel{14}\,7}{\cancel{40}\,20}\cdot\frac{v_0^2}{\mu g} = l$ となっているので $\mu = \frac{7v_0^2}{20gl}$

問4 $X = \frac{v_0^2}{40\mu g} = \frac{\cancel{v_0^2}}{{}_2\cancel{40}g}\times\frac{\cancel{20}gl}{7\cancel{v_0^2}} = \frac{1}{14}l$

台上から見たときは円運動している



問5 台上から見た物体の速度は $\frac{1}{2}v_0 - \left(\frac{1}{10}v_0\right) = \frac{2}{5}v_0$

運動方程式 $m\frac{\left(\frac{2}{5}v_0\right)^2}{r} = N - mg$

$$N = mg + \frac{4mv_0^2}{25r}$$

問6 台上から見たとき、物体は鉛直上向きに動いているので床から見た水平方向の速度は等しい。

これを v_1 とすると、運動量保存より、

$$mv_0 = (m+5m)v_1 \qquad \therefore v_1 = \frac{1}{6}v_0$$

非等速円運動では エネルギー保存と運動方程式を 組み合わせて考える

問7 物体の鉛直方向の速度を v_2 として、エネルギー保存.

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{\cancel{2}}5\cancel{m}\left(\frac{v_0}{10}\right)^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}(v_1^2+v_2^2) + \frac{1}{\cancel{2}}5\cancel{m}\cdot v_1^2 + \cancel{m}gr\times 2 .$$

$$\frac{1}{4}v_0^2 + \frac{1}{20}v_0^2 = \frac{1}{6}v_0^2 + v_2^2 + 2gr \qquad v_2^2 = \frac{2}{15}v_0^2 - 2gr$$

運動量保存は最初からずっと、エネルギー保存はB点通過以降成立している

右上図で、C点における運動方程式について.

物体は台上から見て $m\frac{v_2^2}{r} = N' + mA'$

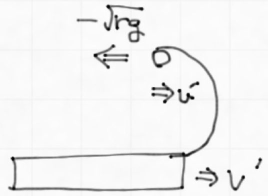
台は床から見て $5mA' = N'$

$$A' = \frac{v_2^2}{6r}$$

$$N' = 5m\cdot\frac{v_2^2}{6r} = \frac{mv_0^2}{9r} - \frac{5}{3}mg$$

問8　D点で垂直抗力が0となっているので、D点での速度をひとして

運動方程式は　$m\frac{v^2}{r} = mg$　　$v = -\sqrt{rg}$　　($\because v<0$)



問9　運動量保存（右図）

$$\begin{cases} \cancel{m}v_0 = \cancel{m}v' + 5\cancel{m}V' \\ v' - V' = -\sqrt{rg} \end{cases}$$

$$V' = \frac{1}{6}(v_0+\sqrt{rg}),\quad v' = \frac{1}{6}(v_0 - 5\sqrt{rg})$$

ひは相対速度

v', V'は床から見た速度

Bを通過後のエネルギー保存

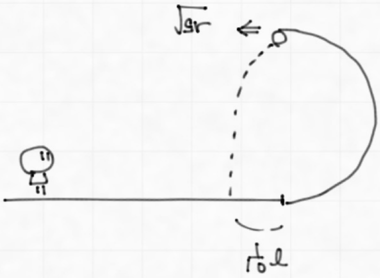
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}5m\left(\frac{1}{10}v_0\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot mv'^2 + \frac{1}{2}\cdot 5m\cdot V'^2 + mg\cdot 2r$$

に上式の値を代入

$$\frac{1}{4}v_0^2 + \frac{1}{20}v_0^2 = \frac{1}{36}(v_0-5\sqrt{rg})^2 + 5\cdot\frac{1}{6^2}(v_0+\sqrt{rg})^2 + 4gr$$

$$\frac{3}{10}v_0^2 = \frac{1}{6}v_0^2 + \frac{25}{36}gr + \frac{5}{36}gr + 4gr$$

$$\frac{4}{30}v_0^2 = \frac{29}{6}gr \qquad v_0 = \frac{\sqrt{145gr}}{2}$$



問10　落下までの時間　$\frac{1}{2}gt^2 = 2r$　　$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$

水平方向の移動幅　$\sqrt{gr}\times 2\sqrt{\frac{r}{g}} = 2r = \frac{1}{10}\ell$

問3より

$$\mu = \frac{7v_0^2}{20g\ell} = \frac{7}{\cancel{20}\cancel{g}\ell}\times\frac{\cancel{145}\cancel{g}r}{4}$$

$$= \frac{7\cdot 29}{16}\times\frac{\cancel{r}}{\cancel{\ell}}\times\frac{1}{20}\cancel{\ell} = \frac{203}{320}$$

3

問1 運動量は mu_x から $-mu_x$ に変わる　$|\Delta p| = |-mu_x - mu_x| = \mathbf{2mu_x}$

往復にかかる時間は $\frac{2L}{u_x}$ だから単位時間に $\frac{u_x}{2L}$ 回衝突するので単位時間の力積の総和は

$$2mu_x \times \frac{u_x}{2L} = \frac{mu_x^2}{L}$$

問2 圧力pは力の総和を面積で割って、　$p = \frac{m\overline{u_x^2}}{L} \times N \div S = \frac{m\overline{u_x^2}N}{SL}$

また、$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ より $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$ なので　$p = \frac{mv^2N}{3SL}$

状態方程式　$p \cdot SL = 1 \cdot RT$ に上の式を代入

$$T = \frac{1}{R} \times \frac{mv^2N}{3SL} \times SL = \frac{mv^2N}{3R}$$

$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}\frac{R}{N}T$　$\left(\frac{R}{N} = k\right)$

これは公式として覚えておくこと

問3 内部エネルギーUは分子の運動エネルギーの総和

$$U = \frac{1}{2}mv^2 \times N = \frac{1}{2}mv^2N = \frac{1}{2} \times 3RT = \frac{3}{2}RT$$

単原子分子 $C_v = \frac{3}{2}R$

二原子分子 $C_v = \frac{5}{2}R$ です

問4 内部エネルギーは運動エネルギーと回転運動のエネルギーの総和

$$U = \frac{1}{2}mv^2 \times N + \frac{R}{N} \times T \times N = \frac{3}{2}RT + RT = \frac{5}{2}RT$$

問5 気体のエネルギーは保存される。問4の結果から多原子分子の運動エネルギーと回転運動のエネルギーの比は

$$\frac{3}{2} : 1 = 3 : 2$$

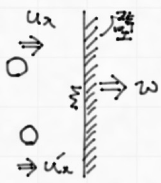
問3、問4より 単原子分子の内部エネルギー $U = \frac{1}{2}mv^2N$

多原子分子 $U = \frac{5}{2}RT = \frac{5}{3} \times \frac{3}{2}RT = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}mV^2N$

だから

$$\frac{1}{2}mv^2N + \frac{1}{2}mV^2 \times \frac{3+2}{3}N = \frac{3}{2}RT + \frac{5}{2}RT \qquad T = \frac{mN}{8R}\left(v^2 + \frac{5}{3}V^2\right)$$

問6



$$\frac{u_x' - w}{u_x - w} = -1 \qquad u_x' = -u_x + 2w$$

したがって運動エネルギーの変化は

$$\frac{1}{2}mu_x'^2 - \frac{1}{2}mu_x^2 = \frac{1}{2}m\left(\cancel{u_x^2} - 4u_xw + 4w^2 - \cancel{u_x^2}\right) \fallingdotseq -2mu_xw$$

壁がLからL+dに移動するのに要する時間は $\frac{d}{w}$、1回の衝突までに要する時間は $\frac{2L}{u_x}$ だから、1つの分子の運動エネルギーは

$$-2mu_xw \times \frac{u_x}{2L} \times \frac{d}{w} = -\frac{mu_x^2d}{L}$$

向きに注意!!

$|u_x'| < |u_x|$ となっていることを確認

問7 $\Delta U = -\frac{md}{L} \times \frac{v^2}{3} \times N = -\frac{mdv^2N}{3L}$

問8 問7は断熱変化だったので内部エネルギーの減少分は全て仕事として使われている。

問8は定積変化なので仕事はしないので問7で失われたエネルギーを補充すればよい　$\frac{mdv^2N}{3L}$

問9

$$P_0 \cdot SL = RT_0$$

断熱 ↓ $0 = W - \dfrac{mdv^2N}{3L}$

$$P_1 \cdot S(L+d) = RT_1$$

定積 ↓ $Q = 0 + \dfrac{mdv^2N}{3L}$

$$P_2 S(L+d) = RT_0$$

等温 ↓ $Q' = W' + 0$

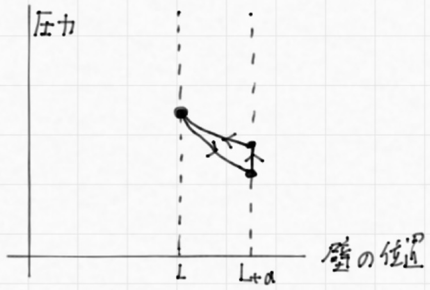
$$P_0 \cdot SL = RT_0$$

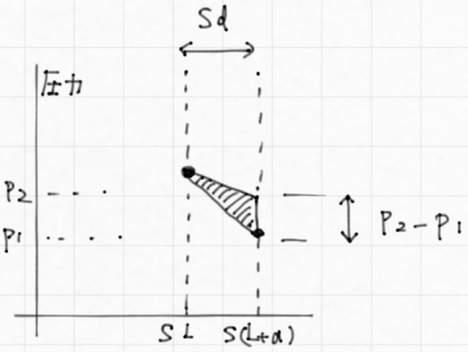
$$\frac{P_2 - P_1}{P_0} = \frac{\dfrac{\cancel{R}T_0}{\cancel{S}(L+d)} - \dfrac{\cancel{R}T_1}{\cancel{S}(L+d)}}{\dfrac{\cancel{R}T_0}{\cancel{S}L}} = \frac{T_0 - T_1}{T_0} \times \frac{L}{L+d}$$

$$\frac{3}{2}R(T_0 - T_1) = \frac{mdv^2N}{3L} = \frac{d}{L}RT_0 \quad \left(\because \ \frac{1}{2}mv^2N = \frac{3}{2}RT_0\right)$$

$$\frac{P_2 - P_1}{P_0} = \frac{\dfrac{2d}{3\cancel{L}}\cancel{T_0}}{\cancel{T_0}} \times \frac{\cancel{L}}{L+d} = \frac{2d}{3L+3d} \fallingdotseq \boldsymbol{\frac{2d}{3L}}$$

問10





上記変化を直線として近似し、三角形の面積を考える.(右グラフ.

$$W = (P_2 - P_1) \times Sd \times \frac{1}{2} = \frac{\cancel{2}d}{3L}P_0 \times Sd \times \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{d^2}{3L} \times \frac{RT_0S}{SL} = \frac{d^2}{3\cancel{S}L^2} \times \frac{mv^2N\cancel{S}}{3}$$

$$= \boldsymbol{\frac{mv^2d^2N}{9L^2}}$$