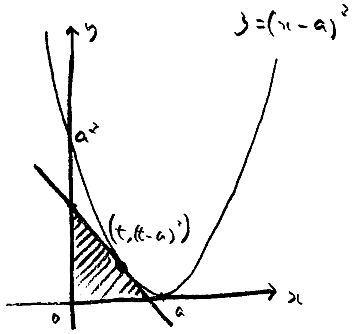
5 (1) $y' = 2(x-a)$



接線をlとするとlは、

l: $y = 2(t-a)(x-t)+(t-a)^2$

$y = 2(t-a)x - t^2 + a^2$

lとy軸の交点は $x=0$を代入して、$y = a^2 - t^2$.

$\therefore (0, a^2-t^2)$

lとx軸の交点は、$y=0$のときなので $x = \dfrac{t+a}{2}$ $\quad \therefore \left(\dfrac{t+a}{2}, 0\right)$

したがって D(t) の面積(これを S(t) とする)は、

$$S(t) = \frac{1}{2}\times(a^2-t^2)\times\frac{t+a}{2} = \underline{\frac{1}{4}(a+t)(a^2-t^2)}$$

(2) $S'(t) = \dfrac{1}{4}\left\{(a^2-t^2)+(a+t)\times(-2t)\right\} = \dfrac{1}{4}(a+t)(a-3t)$

$S'(t)=0$を解くと、$t=-a, \frac{1}{3}a$ だから、S(t)の $0 \leqq t < a$ の範囲における増減は

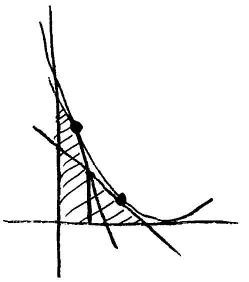
次のようになる

t	0	…	$\frac{1}{3}a$	…	a
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$	$\frac{a^3}{4}$	↗		↘	

$$S\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{3}a\right)\left(a^2-\frac{1}{9}a^2\right) = \frac{8}{27}a^3$$

以上より D(t) の表す図形の面積の最大値は $\underline{\frac{8}{27}a^3}$、そのときの t の値は $\underline{\frac{1}{3}a}$.

(3) $(s, (s-a)^2)$ における接線は、



$y = 2(s-a)x - s^2 + a^2$ (これを g とする)

l と g の交点をもとめると $x = \dfrac{s+t}{2}$

このとき $y = (a-t)(a-s)$

よってもとめる面積は(これをTとする)

$$T = \frac{1}{2}\left(a^2-s^2+(a-t)(a-s)\right)\times\frac{s+t}{2} + \frac{1}{2}(a-t)(a-s)\times\left(\frac{a+t}{2}-\frac{s+t}{2}\right)$$

$$= \frac{a-s}{4}\left\{-t^2+(s+a)t+s^2+as+a^2\right\}$$

s を固定して…

7 $a_n = 6n-5$, $\{a_n\} = \{1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49 \dots\}$

$b_m = 4m-1$, $\{b_m\} = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47 \dots\}$

(1) $a_n = b_m$ となるとき

$$6n-5 = 4m-1 \iff 3n-2m = 2 \dots (*)$$

$(*)$を満たす自然数の組み合わせとして、$(n, m) = (2, 2)$ が考えられる。

このとき $(*)$ から、$3\times2-2\times2=2$ を辺々引いて、

$$3(n-2)-2(m-2)=0$$

$$3(n-2)=2(m-2)$$

上式の左辺は3の倍数であり、右辺は2の倍数だから、$n-2$は2の倍数、$m-2$は3の倍数。

したがって、 $n-2 = 2k$, $m-2 = 3k$

$$\iff n = 2k+2, \quad m = 3k+2.$$

nについて $k=0$ とするときが最小の自然数となるので、$n=2k'$ と表すことができる ($k'=1, 2, 3 \dots$)

よって、 $c_k = a_{2k} = 6\cdot2k-5 = 12k-5$. $\therefore$ $\underline{c_k = 12k-5}$

(2) (1)より $c_k = a_{2k} = b_{3k-1}$ だから

$d_l = c_k$ となるとき、 $l = 2k+(3k-1)-k = 4k-1$

(i) $l = 4k-1$のとき ($k=1, 2, 3 \dots$)

$$d_l = d_{4k-1} = c_k = 12k-5 = 12\frac{l+1}{4}-5 = 3l-2$$

(ii) $l = 4k-2$のとき ($k=1, 2, 3 \dots$)

$$d_l = d_{4k-2} = b_{3k-2} = 12k-9 = 12\times\frac{l+2}{4}-9 = 3l-3$$

(iii) $l = 4k-3$のとき ($k=1, 2, 3 \dots$)

$$d_l = d_{4k-3} = a_{2k-1} = 6(2k-1)-5 = 12k-11 = 12\cdot\frac{l+3}{4}-11 = 3l-2$$

(iv) $l = 4k$のとき ($k=1, 2, 3 \dots$)

$$d_l = d_{4k} = b_{3k} = 4\cdot3k-1 = 12k-1 = 12\cdot\frac{l}{4}-1 = 3l-1.$$

$\therefore$

$$d_l = \begin{cases} 3l-2 & (l=4k-3 \text{のとき}) \\ 3l-3 & (l=4k-2 \quad 〃) \\ 3l-2 & (l=4k-1 \quad 〃) \\ 3l-1 & (l=4k \quad 〃) \end{cases}$$

(3) $\ell = 4k$ のとき

$$S_\ell = S_{4k} = \sum_{i=1}^{k} (d_{4i-3} + d_{4i-2} + d_{4i-1} + d_{4i})$$

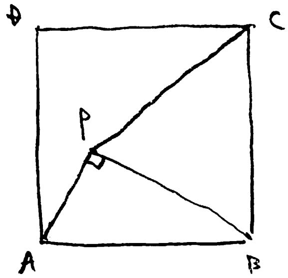
$$= \sum_{i=1}^{k} (12i - 11 + 12i - 9 + 12i - 5 + 12i - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (48i - 26) = \frac{22 + 48k - 26}{2} \times k = k(24k - 2) = \frac{\ell}{4}\left(24 \cdot \frac{\ell}{4} - 2\right)$$

$$= \frac{3}{2}\ell^2 - \frac{1}{2}\ell$$

$\vdots$

$\boxed{8}$ (1) PA⊥PB より $\vec{PA}\cdot\vec{PB}=0$.



ABCDは正方形だから、AB=BCなので

$$|\vec{AB}|=|\vec{BC}|$$

$$|\vec{PB}-\vec{PA}|=|\vec{PC}-\vec{PB}|.$$

ここに $\vec{PC}=x\vec{PA}+y\vec{PB}$ を代入、両辺2乗する

$$|\vec{PB}|^2-2\vec{PA}\cdot\vec{PB}+|\vec{PA}|^2=x^2|\vec{PA}|^2+(1-y)^2|\vec{PB}|^2-2x(y-1)\vec{PA}\cdot\vec{PB}$$

$\vec{PA}\cdot\vec{PB}=0$ なので

$$|\vec{PB}|^2+|\vec{PA}|^2=x^2|\vec{PA}|^2+(1-y)^2|\vec{PB}|^2$$

$$\Leftrightarrow\quad (1-x^2)|\vec{PA}|^2=(y^2-2y)|\vec{PB}|^2$$

$$\Leftrightarrow\quad (1-x^2)|\vec{PA}|^2=(y^2-2y)\alpha^2|\vec{PA}|^2$$

$$\therefore\ 1-x^2=(y^2-2y)\alpha^2 \quad \cdots ①$$

AB⊥BCより

$$(\vec{PB}-\vec{PA})\cdot(x\vec{PA}+y\vec{PB}-\vec{PB})=0$$

$$\Leftrightarrow\quad y|\vec{PB}|^2-|\vec{PB}|^2-x|\vec{PA}|^2=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (y-1)\alpha^2|\vec{PA}|^2-x|\vec{PA}|^2=0$$

$$\therefore\ x=(y-1)\alpha^2 \quad \cdots ②$$

②を①に代入.

$$1-(y-1)^2\alpha^4=(y^2-2y)\alpha^2$$

$$y^2\alpha^2-2y\alpha^2+y^2\alpha^4-2y\alpha^4+\alpha^4-1=0$$

$$(\alpha^4+\alpha^2)y^2-(2\alpha^2+2\alpha^4)y+\alpha^4-1=0$$

$$\cancel{(\alpha^2+1)}\alpha^2y^2-2\alpha^2\cancel{(\alpha^2+1)}y+\cancel{(\alpha^2+1)}(\alpha^2-1)=0$$

$$\alpha^2y^2-2\alpha^2y+(\alpha+1)(\alpha-1)=0$$

$$(\alpha y-\alpha-1)(\alpha y-\alpha+1)=0.$$

$$y=1-\frac{1}{\alpha},\ 1+\frac{1}{\alpha}.$$

$$x=(y-1)\alpha^2=\pm\frac{1}{\alpha}\alpha^2=\pm\alpha.$$

$\alpha>0$ より

図より明らかに $x<0$ だから $\underline{(x,y)=\left(-\alpha,\ 1-\frac{1}{\alpha}\right)}$

(2) $x+y=-\alpha+1-\frac{1}{\alpha}=1-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$

$\alpha>0$ だから $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geqq 2\sqrt{\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}}=2$.

であり、 $x+y\leqq 1-2=-1$

等号は $\alpha=\frac{1}{\alpha}$、すなわち $\alpha=1$ のときで、このとき $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$ かつ $\angle APB=90^\circ$

なので $\triangle APB$ は直角二等辺三角形.

Pは ABCDの中心(対角線の交点)のとき、$x+y$ は最大値 -1 となる

9 ちょうど100点となるのは、

①金2回、 ②金1回銀5回 ③銀10回

のいずれか。

(i) $k=1$ のとき、 不可能なので $P(1)=0$

(ii) $2 \leqq k \leqq 5$のとき ①のみで、1〜$k-1$回目で金を取り出すので、

$$P(k)=\left(\frac{1}{n}\right)^1\times\left(\frac{n-2}{n}\right)^{k-2}\times {}_{k-1}C_1\times\frac{1}{n}=\frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k}$$

(iii) $6 \leqq k \leqq 9$のとき、 ①または②のケースが考えられる

$\boxed{10}$ (1) $f(x) = \int_0^x e^t e^{-x}(\sin t \cos x + \cos t \sin x)\,dt$

$= e^{-x}\cos x \int_0^x e^t \sin t\,dt + e^{-x}\sin x \int_0^x e^t \cos t\,dt.$

ここで $a = e^t \sin t$, $b = e^t \cos t$ とすると

$\frac{da}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t$, $\quad \frac{db}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t$

となるので $\quad e^t \cos t = \frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt} + \frac{db}{dt}\right)$

$e^t \sin t = \frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt} - \frac{db}{dt}\right)$

よって $\int_0^x e^t \cos t\,dt = \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt} + \frac{db}{dt}\right)dt$

$= \frac{1}{2}\left[e^t \sin t + e^t \cos t\right]_0^x = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$

$\int_0^x e^t \sin t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{da}{dt} - \frac{db}{dt}\right)dt = \frac{1}{2}\left[e^t \sin t - e^t \cos t\right]_0^x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$

だから $\quad f(x) = e^{-x}\cos x \times \left\{\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\right\} + e^{-x}\sin x\left\{\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(\cos x \sin x - \cos^2 x + e^{-x}\cos x + \sin^2 x + \sin x \cos x - e^{-x}\sin x\right)$

$= \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x) + \sin x \cos x - \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x.$

$= \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x) + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)$

$= \underline{\frac{1}{2}\left\{e^{-x}(\cos x - \sin x) + \sin 2x - \cos 2x\right\}}$ //

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos x - \sin x}{x e^x} + \frac{\sin 2x}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right\}$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{2x e^x} + \frac{1}{2x e^x} - \frac{\sin x}{2x e^x} + \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{1 - \cos 2x}{2x} - \frac{1}{2x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin^2 x}{2x e^x(1 + \cos x)} + \frac{1}{2e^x}\cdot\frac{1 - e^x}{x} - \frac{1}{2e^x}\cdot\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\sin^2 2x}{2x(1 + \cos 2x)}\right)$

$= 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + 0 = 0$