①

(1) $I = \int_0^1 a^{1-t} b^t dt = \int_0^1 a \times a^{-t} b^t dt = \int_0^1 a \left(\frac{b}{a}\right)^t dt$

$$= \left[\frac{a\left(\frac{b}{a}\right)^t}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}\right]_0^1 = \frac{b}{\log\frac{b}{a}} - \frac{a}{\log\frac{b}{a}} = \underline{\underline{\frac{b-a}{\log b - \log a}}}$$

(2) $0<a<b$ だから、$a^{1-t}b^t > 0$, $a^t b^{1-t} > 0$.

相加相乗平均の公式より

$$a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t} \geqq 2\sqrt{a^{1-t}b^t a^t b^{1-t}} = 2\sqrt{ab}$$

よって $a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t} \geqq 2\sqrt{ab}$ が示された.

$a^{1-t}b^t > a^t b^{1-t}$ を示す.

$$\text{左辺} - \text{右辺} = a^{1-t}b^t - a^t b^{1-t}$$

$$= a^{1-t}b^{1-t}\left(b^{2t-1} - a^{2t-1}\right) > 0.$$

$$\therefore\ a^{1-t}b^t > a^t b^{1-t}$$

したがって、

$$a^{1-t}b^t = \frac{2a^{1-t}b^t}{2} > \frac{a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t}}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad \cdots ①$$

① より

$$I = \int_0^1 a^{1-t}b^t dt > \int_0^1 \sqrt{ab}\, dt = \sqrt{ab}$$

よって $I > \sqrt{ab}$ が示された.

(3) $f(x) = 1 + t(x-1) - x^t$ とおく

$f'(x) = t - tx^{t-1} = t(1 - x^{t-1})$

x	1	$\cdots$
f'	0	+
f	0	↗

$0<t<1$ から
$x>1$ のとき $f'(x) > 0$

となり、また $f(1) = 0$ だから、$x>1$ において

$f(x) > 0$ となることがわかる

よって $0<t<1$, $x>1$ のとき $f(x)>0$ すなわち

$$x^t < 1+t(x-1)$$

が成り立つことが示された. 証明終

(4)

$$I=\int_0^1 a^{1-t}b^t dt=\int_0^1 a\left(\frac{b}{a}\right)^t dt.$$

ここで $0<a<b$ より $0<1<\frac{b}{a}$ となるので $0<t<1$ において (3) より

$$\left(\frac{b}{a}\right)^t < 1+t\left(\frac{b}{a}-1\right)$$

が成り立つ. よって I は

$$I < a\int_0^1 1+t\left(\frac{b}{a}-1\right)dt$$

$$= a\left[t+\frac{t^2}{2}\left(\frac{b}{a}-1\right)\right]_0^1$$

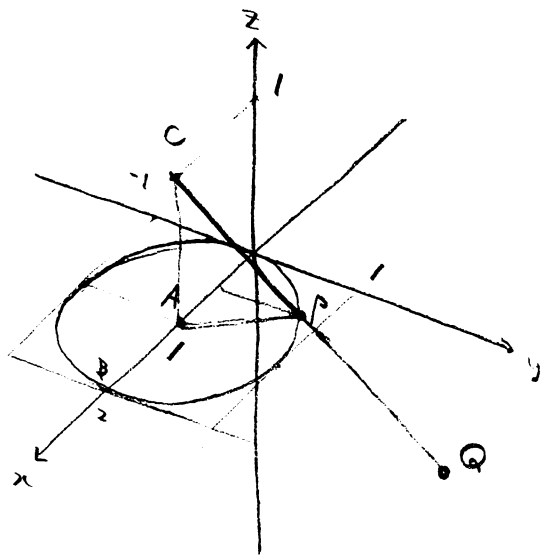
$$= a\left(1+\frac{b}{2a}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

よって $I<\frac{a+b}{2}$ が示された. 証明終

②

(1) $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ だから



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore P(1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ //

(2) 直線 CP は

$$CP:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -1 \end{pmatrix}$$

CP と $x=0$ の交点が Q となるので、$1+t\cos\theta = 0$ より $t = -\frac{1}{\cos\theta}$

このとき

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tan\theta \\ 1+\frac{1}{\cos\theta} \end{pmatrix}$$

$Q\left(0,\ -\tan\theta,\ 1+\frac{1}{\cos\theta}\right)$ //

(3) $Q(x, y, z)$ とおくと

$$x = 0,\quad y = -\tan\theta,\quad z = 1+\frac{1}{\cos\theta}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ のとき、$\tan\theta$ は任意の実数値をとり $-1 \leqq \cos\theta < 0$

だから $\frac{1}{\cos\theta} \leqq -1$ すなわち、$z \leqq 0$

$$z = 1+\frac{1}{\cos\theta} \quad (z \leqq 0)$$

$$z-1 = \frac{1}{\cos\theta} \quad (z \leqq 0)$$

$$(z-1)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta \quad (z \leqq 0)$$

$y = -\tan\theta$ より　$y^2 = \tan^2\theta$ を代入

$$(z-1)^2 = 1 + y^2 \quad (z \leqq 0)$$

$$(z-1)^2 - y^2 = 1 \quad (z \leqq 0)$$

これは中心 $(y, z) = (0, 1)$、漸近線 $z - 1 \pm y = 0$

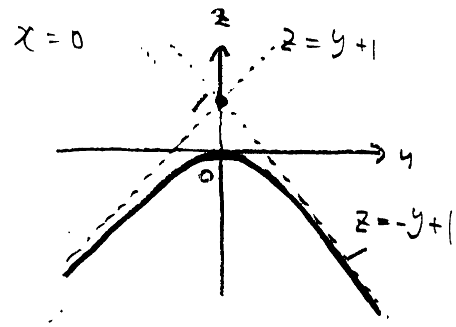
頂点 $(y, z) = (0, 0)$ の双曲線のうち、$z \leqq 0$ の領域に

存在するものを示している。

∴ Q の軌跡の方程式は

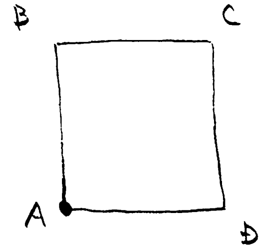
$$x = 0,\ (z-1)^2 - y^2 = 1 \quad (z \leqq 0)$$

その概形は右の太線部



③ (1) p_2について。

2連続で裏がでなければいけない



$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

p_3について、2回目終了時にCに進んでいないといけないので 表・表・裏

$$p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(2) p_4について、全て表だったとして、4回でちょうど1周することになるが、それでは途中にDに止まってしまう。よって、4回で2周することが必要であるが、それは全て裏がでるしかない。

$$p_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

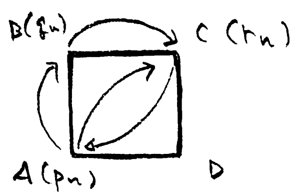
p_5について、全て裏でも3周はできず、全て表でも1周は超えているので、5回で2周することになる。そのためには表が2回、裏が3回でることが必要であり、その出方は、表を①裏を②とおいて、次の10通り（${}_5C_2 = 10$）

①①②②②，①②①②②，①②②①②，①②②②①
②①①②②，②①②①②，②①②②①，②②①①②
②②①②①，②②②①①

2回目にDに止まるものと、4回目にDに止まるもの（太丸）を除くと ①①②②②，②②①①② の2通り

$$p_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 2 = \frac{1}{16}$$

(3) n回目終了時 点PがBにある確率をq_n，Cにある確率をr_nとする



$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2} r_n, \\ q_{n+1} = \frac{1}{2} p_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2} q_n \end{cases}$$

$q_n = \frac{1}{2} p_{n-1}$, $r_{n+1} = 2 p_{n+2}$ を 3つ目の式に代入

$$2p_{n+2} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{4} p_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

$$p_{n+2} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{8} p_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

$p_1 = 0$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{8}$, $p_4 = \frac{1}{16}$, $p_5 = \frac{1}{16}$

$$p_6 = \frac{1}{4} p_4 + \frac{1}{8} p_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

$$p_7 = \frac{1}{4} p_5 + \frac{1}{8} p_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} = \frac{3}{128}$$

$$p_8 = \frac{1}{4} p_6 + \frac{1}{8} p_5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{32} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$$

$$p_9 = \frac{1}{4} p_7 + \frac{1}{8} p_6 = \frac{1}{4} \times \frac{3}{128} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{32} = \frac{5}{512}$$

$$p_{10} = \frac{1}{4} p_8 + \frac{1}{8} p_7 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{64} + \frac{1}{8} \times \frac{3}{128} = \frac{7}{1024}$$

$$p_{11} = \frac{1}{4} p_9 + \frac{1}{8} p_8 = \frac{1}{4} \times \frac{5}{512} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{64} = \frac{9}{2048}$$

$$p_{12} = \frac{1}{4} p_{10} + \frac{1}{8} p_9 = \frac{1}{4} \times \frac{7}{1024} + \frac{1}{8} \times \frac{5}{512} = \frac{12}{4096} = \frac{3}{1024}$$

④
(1) p^xが有理数ならば互いに素な自然数q, rを用いて $p^x=\frac{r}{q}$と表すことができる。

$$p^{\frac{n}{m}}=\frac{r}{q}$$

両辺をm乗すると

$$p^n=\left(\frac{r}{q}\right)^m$$

左辺は整数で、右辺のr, qは互いに素だから、$q=1$。よって

$$p^n=r^m$$

左辺はpの倍数だから右辺もpの倍数、すなわちrはpの倍数。
また、pは素数だから、rはp以外の素因数をもたない。
したがって、$r=p^l$と表せる（lは自然数）。
これを代入、

$$p^n=p^{lm}$$

$$n=lm$$

ここで、nとmは1以外の約数をもたないので、$l=n$, $m=1$
よって p^xが有理数であるならば、mは1に限られる。

証明終

(2) (1)より、xが有理数ならばxは整数に限られる。
$x=n$とすると

$$p^n=-n^2+9n-5$$
$$=\frac{61}{4}-\left(n-\frac{9}{2}\right)^2$$

ここで$p^n\geqq 2$より $\frac{61}{4}-\left(n-\frac{9}{2}\right)^2\geqq 2$が必要となる。

$$\left(n-\frac{9}{2}\right)^2 \leqq \frac{53}{4}$$

$$(2n-9)^2 \leqq 53 < 64$$

$$-8 < 2n-9 < 8$$

$$\frac{1}{2} < n < \frac{17}{2}$$

$$1 \leqq n \leqq 8$$

$n=1$ のとき	$p = -1+9-5 = 3$	$(p, x) = (3, 1)$
$n=2$ 〃	$p^2 = -4+18-5 = 9$	$(p, x) = (3, 2)$
$p=3$ 〃	$p^3 = -9+27-5 = 13$	不適
$p=4$ 〃	$p^4 = -16+36-5 = 15$	〃
$p=5$ 〃	$p^5 = -25+45-5 = 15$	〃
$p=6$ 〃	$p^6 = -36+54-5 = 13$	〃
$p=7$ 〃	$p^7 = -49+63-5 = 9$	〃
$p=8$ 〃	$p^8 = -64+72-5 = 3$	〃

以上より、 $\underline{(p, x) = (3, 1), (3, 2)}$