① (1) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$

正の約数は $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ と表せる.（a, b, c は $0 \leqq a \leqq 5,\ 0 \leqq b \leqq 2,\ 0 \leqq c \leqq 1$ を満たす整数）

そのうち、偶数となるのは $a \neq 0$ のものなので

$$1 \leqq a \leqq 5,\quad 0 \leqq b \leqq 2,\quad 0 \leqq c \leqq 1$$

その総数は

$$5 \times (2+1) \times (1+1) = 30 \qquad \underline{30個}$$

その総和は

$$(2^1+2^2+2^3+2^4+2^5) \times (3^0+3^1+3^2) \times (7^0+7^1)$$

$$= 2 \times \frac{2^5-1}{2-1} \times \frac{3^3-1}{3-1} \times \frac{7^2-1}{7-1} = 62 \times 13 \times 8 = \underline{6448}$$

(2)

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma = 0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = a,\quad \alpha\beta\gamma = -\frac{5}{2}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 0^2 - 2a = \underline{-2a}$$

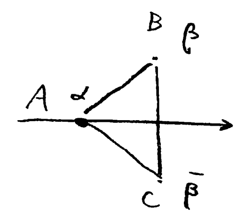
実数係数の3次方程式は必ず1つ実数解をもつ.

これを α とすると、他の2解は実数係数の2次方程式の2解となるが、これらは2つの実数解か、1つの重解、互いに共役な2つの複素数解のいずれかをもち、△ABCが複素数平面内で直角二等辺三角形となるのは、互いに共役な2つの複素数解をもつときのみである. したがって、残りの2解は $\beta, \bar{\beta}$ と表すことができる ($\gamma = \bar{\beta}$)

このとき先の解と係数の関係は

$$\alpha+\beta+\bar{\beta} = 0,\quad \alpha\beta+\beta\bar{\beta}+\alpha\bar{\beta} = a,\quad \alpha\beta\bar{\beta} = -\frac{5}{2}$$

となる.



直角二等辺三角形となるのは $AB = AC,\ \angle BAC = 90^\circ$

のときに限られるので、

$$\frac{\bar{\beta}-\alpha}{\beta-\alpha} = \pm i$$

$\beta = p + qi$ とおくと

$$\begin{cases} \alpha + 2p = 0 & \cdots ① \\ 2\alpha p + p^2 + q^2 = a & \cdots ② \\ \alpha(p^2+q^2) = -\frac{5}{2} & \cdots ③ \end{cases}$$

$$p - \alpha \pm q = (\pm p \mp \alpha + q)i$$

$$\Leftrightarrow \quad p - \alpha \pm q = 0$$

$$\alpha = p \pm q \quad \cdots ④$$

④を①,③に代入.

$$3p \pm q = 0 \qquad p = \mp \frac{1}{3}q$$

$$(p \pm q)(p^2+q^2) = -\frac{5}{2}$$

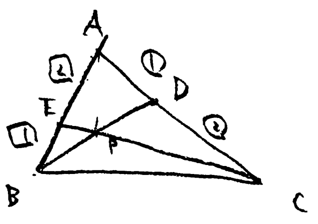
$$\pm \frac{2}{3}q\left(\frac{10}{9}q^2\right) = -\frac{5}{2}$$

$$q = \mp \frac{3}{2}, \quad p = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

このとき②より

$$a = 2(-1) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \underline{\frac{3}{2}}$$

(3)



D, Eを左のようにとる

$$\frac{AB}{BE} \times \frac{EP}{PC} \times \frac{CD}{DA} = 1 \text{ より } EP : PC = 1 : 6$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}.$$

$$(s, t) = \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

正三角形の1辺をaとすると $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = a$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \times \cos 60° = \frac{1}{2}a^2$

$$\cos\angle PAB = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|} = \frac{9}{2\sqrt{21}}$$

②

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = X$ とおく $(X>0)$

$$X^2 - 12X + 32 \leqq 0$$

$$(X-8)(X-4) \leqq 0$$

$$4 \leqq X \leqq 8$$

$$4 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq 8$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$\underline{-3 \leqq x \leqq -2}$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{24}\right)^{15} = 15\left(0 - \log_{10} 2^3 \cdot 3\right) = -15\left(3\log_{10} 2 + \log_{10} 3\right)$$

$$= -15\left(3 \times 0.3010 + 0.4771\right) = -20.7015$$

よって $\left(\frac{1}{24}\right)^{15} = 10^{-21} \times 10^{0.2985}$

よって 小数第21位に 0でない数がはじめてあらわれる.

(2) 全部で $2n$個のデータがあるとし、小さいものから $a_1 a_2 \ldots\ldots a_{2n}$ とすると

$a_1 = 140$, $a_{2n} = 180$, $a_n + a_{n+1} = 150 \times 2$, $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \underset{150}{\underset{\shortparallel}{A}} \leqq a_{n+1} \leqq \ldots \leqq a_{2n}$

平均値が最小となるとき

$$a_1 = 140 = a_2 = \cdots = a_{n-1} \leqq a_n \leqq a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2n-1} \leqq a_{2n} = 180$$

となることが必要.

このときの総和は

$$140(n-1) + 300 + a_{n+1} \times (n-2) + 180$$

となるので $a_{n+1} = a_n = 150$ のとき最小となることが分かる

$$140(n-1) + 300 + 150n - 300 + 180 = 290n + 40$$

$$\bar{x} = \frac{290n+40}{2n} = 145 + \frac{20}{n} \longrightarrow 145$$

同様に $a_1 = 140 < a_2 = \cdots = a_n = A = 150 = a_{n+1} < a_{n+2} = \cdots = a_{2n} = 180$

となるとき最大でその総和は

$$140 + 150n + 180(n-1) = 330n - 40$$

$$\bar{x} = \frac{330n-40}{2n} = 165 - \frac{20}{n} \to 165.$$

$$\therefore \quad \underline{145 < \bar{x} < 165}$$

$$\frac{140(n-1) + 2A + A(n-2) + 180}{2n} \leqq \bar{x} \leqq \frac{140 + A(n-2) + 2A + 180(n-1)}{2n}$$

$$\frac{140(n-1) + nA + 180}{2n} \leqq 170 \leqq \frac{140 + nA + 180(n-1)}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 40 + nA \leqq 200n, \quad 160n \leqq nA - 40$$

$$\Leftrightarrow \quad 160 - \frac{40}{n} \leqq A \leqq 200 - \frac{40}{n}$$

$$160 < A < 200$$

$A \leqq 180$ なので

$$\underline{160 < A \leqq 180}$$

③

(1) $f'(x) = \sqrt{-x^2+4x-3} + (x-1)\times\frac{1}{2}\times\frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

$$= \frac{-x^2+4x-3+(x-1)(-x+2)}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \frac{-2x^2+7x-5}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \frac{-(2x-5)(x-1)}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

$1<x<3$ の範囲で $f'(x)=0$ となるのは $x=\frac{5}{2}$ のときのみ.

したがって $f(x)$ の増減は下のようになる

x	1	…	$\frac{5}{2}$	…	3
$f'(x)$	/	+	0	−	/
$f(x)$	0	↗		↘	0

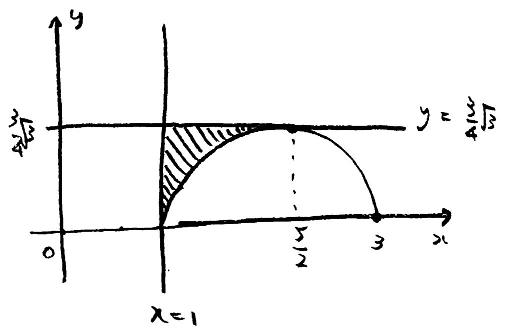
$f(1)=0$, $f(3)=0$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\times\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

よって $f(x)$ は $x=\frac{5}{2}$ のとき極大値 $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ をとる

(2)

右図の斜線部の面積をもとめればよい.



面積をSとして

$$S = \int_1^{\frac{5}{2}} \frac{3}{4}\sqrt{3} - (x-1)\sqrt{-x^2+4x-3}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{3}\left(\frac{5}{2}-1\right) - \int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)\sqrt{-(x-2)^2+1}\,dx$$

〜部を S_1 とする.

$x-2=\sin\theta$ とおくと. $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$.

x	$1 \to \frac{5}{2}$
θ	$-\frac{\pi}{2} \to +\frac{\pi}{6}$

$$S_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{6}} (\sin\theta+1)\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{6}} \sin\theta\cos^2\theta + \frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$S = \frac{9}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$