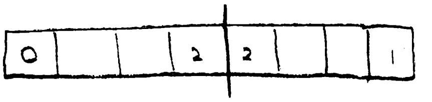
① (1) $x_1+x_2=1+2^n$ となっているので



あるx_1に対して、$x_2=1+2^n-x_1$となったとき、

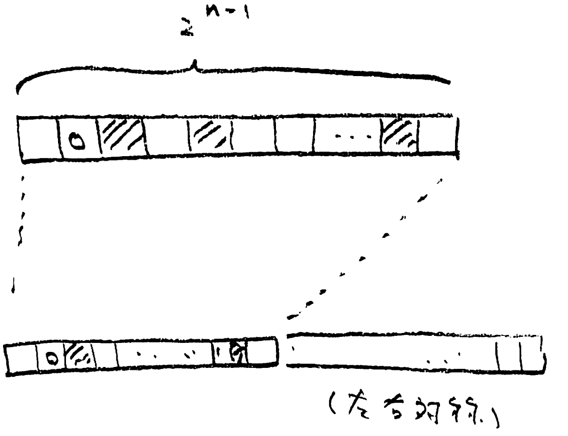
得点が1となる。

$$p(n,1)=\frac{1}{2^n}$$

得点が2となるのは右上図の2と書かれたマスが選ばれたとき、なので

$$p(n,2)=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

(2) $p(n-1,k-1)$について、



あるx_1に対して$k-1$回折り

返すとx_1と重なるマスは

2^{k-1-1} 通り……(*)

存在する。このとき

$p(n,k)$について、$1\leqq x_1\leqq 2^{k-1}$となる

x_1に対して、k回折り返すと重なるマスは、(*)の2^{k-2}通りと、

別に左右対称に2^{k-2}マス存在するので、合計 2^{k-1}通り存在する。

よって $$p(n-1,k-1)=\frac{2^{k-2}}{2^{n-1}}$$

$$p(n,k)=\frac{2^{k-1}}{2^n}$$

となり $p(n,k)=p(n-1,k-1)$であることが分かる。

(3) (2)より $$p(n,k)=\frac{2^{k-1}}{2^n}$$

②

(1) $|\overrightarrow{OA}| = 3$, $|\overrightarrow{OB}| = 4$.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 3\times4\times\cos\frac{2\pi}{3} = -6.$$

$$|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + 4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 4|\overrightarrow{OB}|^2 = 9 - 24 + 64 = 49$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}| = 7$$

(2) $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ $\quad\left(\because\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin2\alpha = 2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\cos2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-\frac{2}{16} = \frac{7}{8}$$

$$\sin4\alpha = 2\sin2\alpha\cos2\alpha = 2\times\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{7}{8} = \frac{7\sqrt{15}}{32}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}\times|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin4\alpha = \frac{1}{2}\times3\times\cancel{4}\times\frac{7\sqrt{15}}{\cancel{32}\,8} = \underline{\frac{21}{16}\sqrt{15}}$$

(3) $\overrightarrow{OA} = 3\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = 4\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ とする.

$4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 12\overrightarrow{OE}$ に代入すると.

$$12\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\ 0\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow\quad \cos\theta+\cos\varphi = 1,\quad \sin\theta+\sin\varphi = 0$

これより $\cos\theta = 1-\cos\varphi$, $\sin\theta = -\sin\varphi$ を $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$ に代入

$$(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 1$$

$$-2\cos\varphi + 1 = 0$$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{2}$

$$\sin\theta = -\sin\varphi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\theta, \varphi) = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

よって

$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{OB} = \left(2, -2\sqrt{3}\right)$$

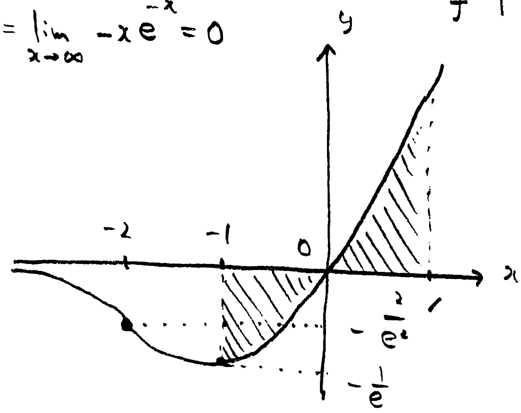
または $\overrightarrow{OA} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{OB} = \left(2, 2\sqrt{3}\right)$

③ (1) $f'(x) = (x+1)e^{x}$

$f''(x) = (x+2)e^{x}$

$\lim_{x \to -\infty} xe^{x} = \lim_{x \to \infty} -xe^{-x} = 0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	⤵		⤷		⤴



(2) $\int xe^{x}dx = (x-1)e^{x} + C$.

よってもとめる面積をSとして

$$S = \int_{-1}^{0} -xe^{x}dx + \int_{0}^{1} xe^{+x}dx$$

$$= \int_{0}^{-1} xe^{x}dx + \int_{0}^{1} xe^{x}dx$$

$$= \left[(x-1)e^{x}\right]_{0}^{-1} + \left[(x-1)e^{x}\right]_{0}^{1}$$

$$= -2e^{-1} + 0 + 2 \times e^{0} = \underline{2 - \frac{2}{e}}$$ //

(3) $a_{n+1} = f(t)a_n + 1 \quad \cdots ①$

グラフより $t \leqq \frac{1}{2}$ のとき $-\frac{1}{e} \leqq f(t) \leqq f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{2} < 1 \quad \cdots ②$

$(\because e < 4)$

よって①は

$$a_{n+1} - \frac{1}{1-f(t)} = f(t)\left\{a_n - \frac{1}{1-f(t)}\right\}$$

と変形でき、これより、

$$a_n - \frac{1}{1-f(t)} = \left(a_1 - \frac{1}{1-f(t)}\right)\{f(t)\}^{n-1}$$

となる。このとき、$|f(t)| < 1$ （∵②）だから

a_n は収束する。（$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-f(t)}$ ）

④

(1)

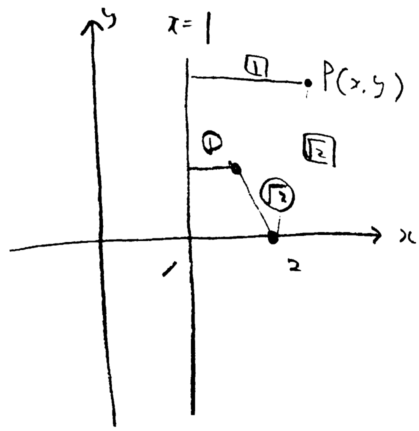
$$|x-1|\times\sqrt{2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

両辺とも正なので2乗する。

$$2(x-1)^2=(x-2)^2+y^2$$

$$\iff x^2-y^2=2$$

$$\iff \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2=1 \quad (\text{双曲線})$$



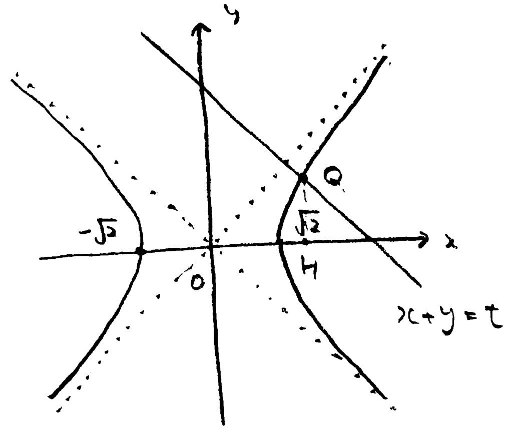
(2)

$y=t-x$ を代入

$$x^2-(t-x)^2=2$$

$$x=\frac{2+t^2}{2t} \quad (\because t\neq 0)$$

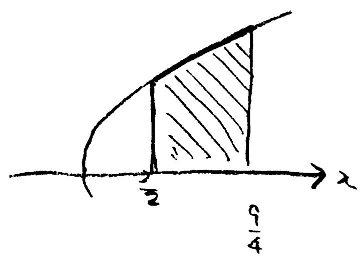
$$(x,y)=\left(\frac{2+t^2}{2t},\ \frac{t^2-2}{2t}\right)$$



(3)

$$x=\frac{2+t^2}{2t}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{4t^2-2(2+t^2)}{4t^2}=\frac{2(t^2-2)}{4t^2}$$



ここで $2\leqq t\leqq 4$ のとき $\frac{dx}{dt}>0$ となるので、$2\leqq t\leqq 4$ の区間で

x は単調に増加する。 $\left(\frac{3}{2}\leqq x\leqq\frac{9}{4}\right.$ となる$\left.\right)$

したがって、QHの通過領域は $x^2-y^2=2$ の $\frac{3}{2}\leqq x\leqq\frac{9}{4}$, $y>0$ の

部分と、$y=0$, $x=\frac{3}{2}$, $x=\frac{9}{4}$ で囲まれた領域となる。面積をSとすると、

$$S=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}} y\,dx=\int_{2}^{4}\frac{t^2-2}{2t}\times\frac{2(t^2-2)}{4t^2}\,dt$$

$$= \int_2^4 \frac{:(t^4-4t^2+4)}{4t^3}\,dt$$

$$= \int_2^4 \frac{1}{4}t - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{8}t^2 - \log t + \frac{1}{-2}t^{-2}\right]_2^4$$

$$= 2 - \log 4 - \frac{1}{32} - \left(\frac{1}{2} - \log 2 - \frac{1}{8}\right)$$

$$= \underline{\frac{51}{32} - \log 2}$$