①

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ //

(2) $k=1$ のとき、 1のカードは1枚しかないので確率は 0

$k \geqq 2$ のとき、 k枚のkとかかれたカードから2枚引くのは ${}_kC_2$ 通り。

$\frac{1}{2}n(n+1)$ 枚から2枚ひくのは ${}_{\frac{1}{2}n(n+1)}C_2$ 通り。したがって

もとめる確率は $\dfrac{{}_kC_2}{{}_{\frac{1}{2}n(n+1)}C_2} = \dfrac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$

ここで仮に $k=1$ とすると、$\dfrac{4\times0\times1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=0$ となるので、これは、

$k=1$ のときも成り立っている。

よって、もとめる確率は $\dfrac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$ //

(3)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$= \frac{4}{\cancel{(n-1)}(n+2)}\times\frac{1}{\cancel{6}_{3}}\times\left(\cancel{2n+1-3}^{\,2}\right) = \frac{4}{3(n+2)}$$ //

(4)

k と $k+1$ が選ばれるとすると、($1 \leqq k \leqq n-1$)

えらび方は $k\times(k+1)$ 通り。

よって連続したカードのえらび方の総数は

$$\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1) = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1+3) = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1).$$

もとめる確率は

$$\frac{\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)}{{}_{\frac{1}{2}n(n+1)}C_2} = \frac{\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)}{\frac{1}{8}n(n+1)(n+2)(n-1)} = \frac{8}{3(n+2)}$$ //

②

(1)

$$\vec{AP}\cdot(\vec{BP}+\vec{CP})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1)+y(2y-1)+z(2z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+y^2-\frac{1}{2}y+z^2-\frac{1}{2}z=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 \quad \cdots ①$$

これは中心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 半径 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ の球を表している.

よって集合Sは球面であり. 中心Qは $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, 半径は $\frac{\sqrt{6}}{4}$ である

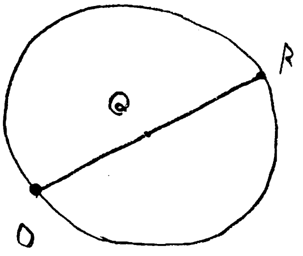
(2) 最も遠い点をRとする.

①で $(x, y, z)=(0, 0, 0)$ とすると

成立するので Oは S上の点

したがって. RはQに対して. Oと

対称な点であり. $\vec{OQ}=\vec{QR}$



よって $\vec{OR}=2\vec{OQ}=\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(3)

$$\vec{OQ}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{OA}+\frac{1}{4}\vec{OB}+\frac{1}{4}\vec{OC}$$

ここで $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ を満たすので Qは平面ABC上に存在する.

証明終

(4) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ のいずれにも垂直なベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ が考えられる。よって直線 l の式は

$$l:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad (t\text{は任意の実数})$$

となる。これを①に代入する。

$$\left(\frac{1}{2}+t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+t-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+t-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$3t^2=\frac{3}{8}$$

$$t=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって交点は $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\pm\sqrt{2}\\1\pm\sqrt{2}\\1\pm\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$$\underline{\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4}\right)}\quad (\text{複号同順})$$

③

(1) $f_n(x) = x^{n+1}(1-x)$

$$f_n'(x) = (n+1)x^n(1-x) - x^{n+1}$$
$$= x^n(n+1-nx-x-x)$$
$$= x^n\{n+1-(n+2)x\}$$

$(a_n, f_n(a_n))$ における接線は

$$y = a_n^n\{n+1-(n+2)a_n\}(x-a_n) + a_n^{n+1}(1-a_n)$$

これが原点を通るとき $(x, y) = (0, 0)$ となるので

$$0 = -a_n^{n+1}(n+1) + a_n^{n+2}(n+2) + a_n^{n+1} - a_n^{n+2}$$

$a_n > 0$ なので a_n^{n+1} で割る。

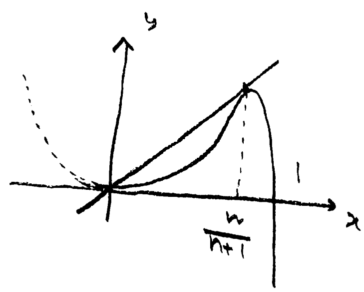
$$0 = -n-1+(n+1)a_n+1$$

$$\underline{a_n = \frac{n}{n+1}}$$

(2) $0 < x < 1$ のとき $x^{n+1}(1-x) > 0$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty$ より、

$f_n(x)$ の概形は右のようになる



($x<0$ の領域では n の偶奇でグラフは変わる)

したがって

$$B_n = \int_0^1 x^{n+1}(1-x)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \underline{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}$$

$$C_n = \int_0^{a_n} x^{n+1}(1-x)\,dx = \frac{a_n^{n+2}}{n+2} - \frac{a_n^{n+3}}{n+3} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\times\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)(n+3)}}{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}\right\}^{\frac{n+2}{n}} \times \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{e} \times 2 = \frac{2}{e}$$

④

(1) (i) $0 < t \leqq 1$ のとき

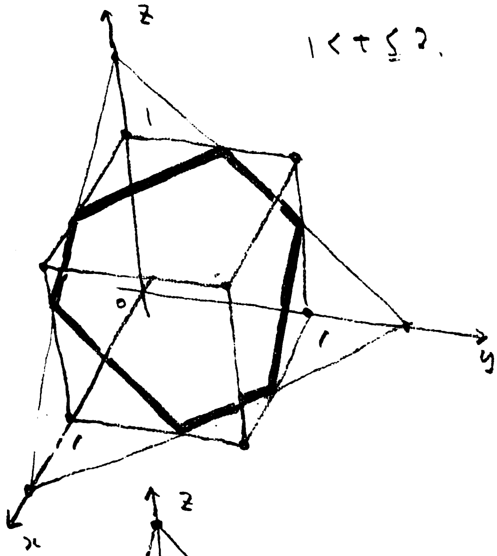
辺の長さ $\sqrt{2}t$ の正三角形.

$$f(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}t)^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$

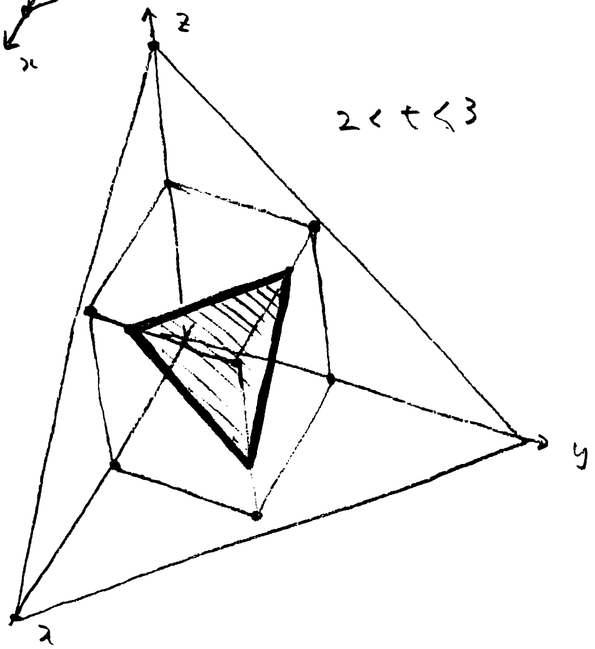
(ii) $1 < t \leqq 2$ のとき.

右図の六角形

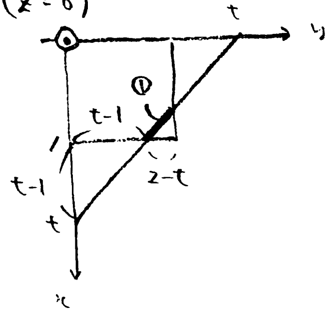
$1 < t \leqq 2$.



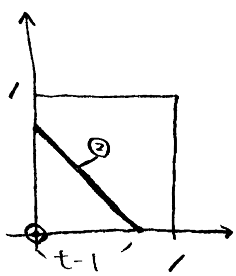
$2 < t < 3$



$(z=0)$



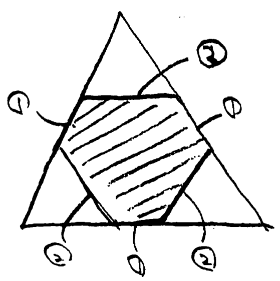
$(x=1)$



上図から太線部①の長さは $\sqrt{2}(2-t)$

また $x=1$ の断面(右上図)より

太線部②の長さは $\sqrt{2}(t-1)$



もとめる面積は②×2+①の長さの正三角形から②の長さの正三角形を3つひいたもの.

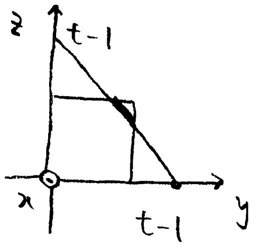
$$f(t) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}(t-1) + \sqrt{2}(2-t)\right)^2 \times \sin 60^\circ - \frac{3}{2}\left(\sqrt{2}(t-1)\right)^2 \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}t)^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 2(t-1)^2$$

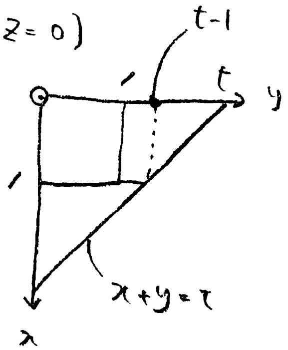
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2t^2 - 6t^2 + 12t - 6\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-2t^2 + 6t - 3\right)$$

(iii) $2 < t < 3$ のとき

$(x=1)$



$(z=0)$



右上図より、$x=1,\ z=0$ のとき $y=t-1$

左上図より太線部は $\sqrt{2}(t-1)-2\times(t-1-1)\times\sqrt{2}$

$$=\sqrt{2}t-\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}t = 3\sqrt{2}-\sqrt{2}t$$

$$f(t)=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{2}-\sqrt{2}t)^2\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2\times(3-t)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2$$

$0<t\leqq 1$ のときの $f(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$ に $t=0$ を代入すると $f(0)=0$ となるので、これは $t=0$ のときも成り立つ。

同様に、$t=3$ のときも成り立つので

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 & (0\leqq t\leqq 1)\\ \frac{\sqrt{3}}{2}(-2t^2+6t-3) & (1<t\leqq 2)\\ \frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2 & (2<t\leqq 3)\end{cases}$$

(2)

(i) $0\leqq t\leqq 1$ のとき、$t=1$ で最大 $f(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $1<t\leqq 2$ のとき $f'(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(-4t+6)$

よって $f'(t)=0$ となるのは $t=\frac{3}{2}$ のときで、$f(t)$ の増減は次のようになる。

t	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{9}{2} + 9 - 3\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

よって $t = \frac{3}{2}$ のとき最大となり、最大値は $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

(iii) $2 < t \leqq 3$ のとき

$f(t)$ は単調に減少し、$f(2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ だから $f(t) < \frac{3}{2}$

(i)(ii)(iii) より　$t = \frac{3}{2}$ のとき最大となり、最大値は $\underline{\frac{3}{4}\sqrt{3}}$

(3)
$$\int_0^3 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\,dt + \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{2}(-2t^2+6t-3)\,dt + \int_2^3 \frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[-\frac{2}{3}t^3 + 3t^2 - 3t\right]_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{16}{3} + 12 - 6 + \frac{2}{3} - 3 + 3\right)$$

$$= \underline{\sqrt{3}}$$