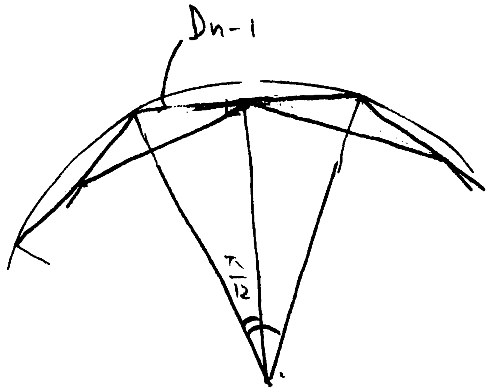
①



(1) 正十二角形の中心と各頂点を結ぶ線分を正十二角形の半径と呼ぶことにする。

Dの半径は1、となりあう頂点の半径のなす角は $2\pi \div 12 = \frac{\pi}{6}$.

したがって、

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin\frac{\pi}{6} \times 12 = \underline{3}$$

D_1の半径はDの半径の $\cos\left(\frac{\pi}{6} \times \frac{1}{2}\right)$ 倍になっているので $\cos\frac{\pi}{12}$

したがって S_1は

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \cos\frac{\pi}{12} \times \cos\frac{\pi}{12} \times \sin\frac{\pi}{6} \times 12$$

$$= 3\cos^2\frac{\pi}{12} = 3 \times \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \underline{\frac{3}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

(2) D_{n-1}とD_nの半径の比は、$\cos\frac{\pi}{12}$

したがって

$$S_n = \cos^2\frac{\pi}{12} S_{n-1}$$

$$= \left(\cos^2\frac{\pi}{12}\right)^2 S_{n-2}$$

$$= \cdots\cdots = \left(\cos^2\frac{\pi}{12}\right)^n S$$

$$= \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n \times 3$$

$$\underline{S_n = 3 \times \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n}$$

(3) $S_n \leqq \frac{1}{2}S$ より $\cancel{3} \times \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n \leqq \frac{1}{2} \times \cancel{3}$

両辺の底を2とする対数をとる。

$$n\log_2(2+\sqrt{3}) - 2n \leqq -1$$

$$n \geqq \frac{1}{2-\log_2(2+\sqrt{3})} \quad \cdots ①$$

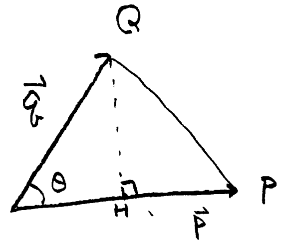
ここで $1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$ より

$$\frac{1}{2-1.89} < \frac{1}{2-\log_2(2+\sqrt{3})} < \frac{1}{2-1.9}$$

$$9.0\ldots < \frac{1}{2-\log_2(2+\sqrt{3})} < 10$$

したがって ① を満たす最小のnは $\underline{n=10}$ //

② (1) 右図のようにQからPに下ろした垂線の足をH、$\angle POQ=\theta$とする。



$\triangle OPQ$の面積Sは

$$S=\frac{1}{2}OP\times QH$$

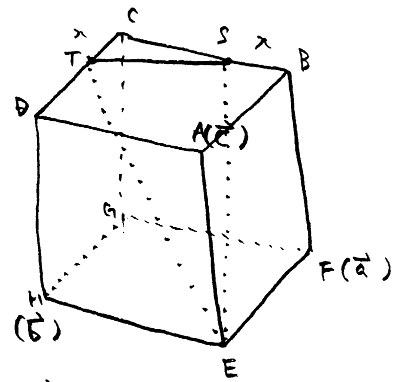
$$=\frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sqrt{1-\frac{(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

証明終

(2) $\overrightarrow{ES}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BS}$

$$=\underline{\vec{a}+\vec{c}+\frac{x}{2}\vec{b}}$$



$\overrightarrow{ET}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DT}=\underline{\vec{b}+\vec{c}+\frac{2-x}{2}\vec{a}}$

$|\overrightarrow{ES}|^2=|\vec{a}+\vec{c}+\frac{x}{2}\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{x^2}{4}|\vec{b}|^2$

$(\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0)$

$$=4+4+x^2=\underline{x^2+8}$$

$|\overrightarrow{ET}|^2=|\vec{b}+\vec{c}+\frac{2-x}{2}\vec{a}|^2=4+4+(2-x)^2=\underline{x^2-4x+12}$

$\overrightarrow{ES}\cdot\overrightarrow{ET}=(\vec{a}+\vec{c}+\frac{x}{2}\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c}+\frac{2-x}{2}\vec{a})$

$$=2(2-x)+4+\frac{x}{2}\times 4=8$$

よって$\overrightarrow{ES}\cdot\overrightarrow{ET}$は$x$の値にかかわらず一定値をとる。

(3) $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+8)(x^2-4x+12)-8^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^4-4x^3+20x^2-32x+32}$$

(4) $(f(x)\times 2)^2=g(x)$とおくと

$$g(x)=x^4-4x^3+20x^2-32x+32$$

$$g'(x)=4x^3-12x^2+40x-32$$

$$=4(x^3-3x^2+10x-8)$$

$= 4(x-1)(x^2-2x+8)$

$g'(x)=0$ となるのは $x^2-2x+8=(x-1)^2+7>0$ なので $x=1$ のみ.

$g(x)$ の増減は次のようになる

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$g(0)=32,\quad g(1)=17,\quad g(2)=32$

したがって

$$\underset{x=1\text{のとき}}{\frac{1}{2}\sqrt{17}} \leqq f(x) \leqq \underset{x=0,2\text{のとき}}{\frac{1}{2}\sqrt{32}} = 2\sqrt{2}$$

$f(x)$ の最大値は $2\sqrt{2}$, 最小値は $\frac{1}{2}\sqrt{17}$

⑤

(1) $f'(x) = e^x + xe^x = \underline{(1+x)e^x}$

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = \underline{(2+x)e^x}$

$\{(ax+b)e^x\}' = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x$

これがすべてのxでxe^xと等しくなるので、$a=1$, $a+b=0$.

すなわち $\underline{(a, b) = (1, -1)}$

(2) PにおけるCの接線は、(p, pe^p)を通り、傾き$f'(p) = (1+p)e^p$

となるのでlは

$$y = (1+p)e^p(x-p) + pe^p$$

と表すことができる。したがって

$$\underline{c = (1+p)e^p, \quad d = pe^p}$$

このとき $g(x) = xe^x - (1+p)e^p(x-p) - pe^p$

$g'(x) = e^x + xe^x - (1+p)e^p$

$g''(x) = (2+x)e^x$

$x \geqq 0$において$g''(x) > 0$であり$g'(0) = 1 - e^p - pe^p < 0$ $(\because p > 0)$

また $g'(p) = e^p + pe^p - (1+p)e^p = 0$ なので、$g(p)$のグラフの

増減は下のようになる

x	0	…	p	…
$g'(p)$	$-$	$-$	0	$+$
$g(p)$		↘	0	↗

$g(p) = pe^p - 0 - pe^p = 0$

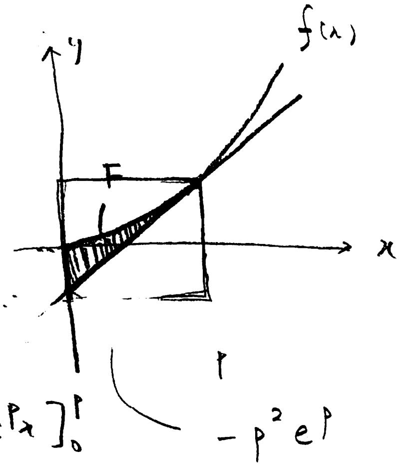
以上の結果より $g(x)$は$x \geqq 0$において

$$g(x) \geqq g(p) = 0$$

すなわち $xe^x - (1+p)e^p(x-p) - pe^p \geqq 0$

よって $f(x) \geqq c(x-p) + d$ が成り立つ。

(3)



$$S(p) = \int_0^p f(x) - c(x-p) - d \, dx$$

$$= \int_0^p xe^x - (1+p)e^p(x-p) - pe^p \, dx$$

$$= \left[xe^x - e^x - (1+p)e^p(x-p)^2 \times \frac{1}{2} - pe^p x \right]_0^p$$

$$= pe^p - e^p - p^2e^p + 1 + (1+p)p^2 \times \frac{1}{2}e^p$$

$$= e^p\left(p - 1 - p^2 + \frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{2}p^2\right) + 1$$

$$= \frac{1}{2}e^p(p^3 - p^2 + 2p - 2) + 1$$

(4) Rの領域は $0 \leqq x \leqq p$, かつ, $-p^2e^p \leqq y \leqq f(p) = pe^p$

なので

$$T(p) = (p-0)(pe^p + p^2e^p) = p^2(1+p)e^p$$

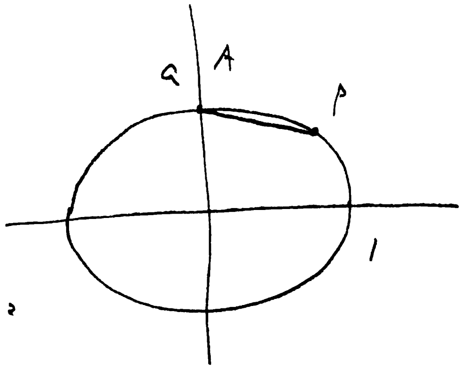
$$\lim_{p\to\infty} \frac{S(p)}{T(p)} = \lim_{p\to\infty} \frac{\frac{1}{2}e^p(p^3 - p^2 + 2p - 2) + 1}{p^2(1+p)e^p}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p^3}\right) + \frac{1}{p^3e^p}}{\frac{1}{p} + 1}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}$$

⑥

(1)



$l = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (a\sin\theta - a)^2}$

$= \sqrt{\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - 2a^2\sin\theta + a^2}$

$Y = l^2 = 1 - \sin^2\theta + a^2\sin^2\theta - 2a^2\sin\theta + a^2$

$= 1 - X^2 + a^2X^2 - 2a^2X + a^2$

$= \underline{(a^2-1)X^2 - 2a^2X + a^2 + 1 = f(x)}$ //

また $X = \sin\theta$ より

$-1 \leqq X \leqq 1$

(2) $0<a<1$ のとき

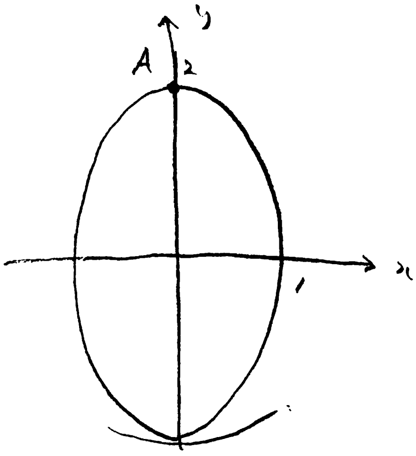
$f(x) = (a^2-1)\left(X - \frac{a^2}{a^2-1}\right)^2 - \frac{a^4}{a^2-1} + a^2 + 1 = (a^2-1)\left(X - \frac{a^2}{a^2-1}\right) - \frac{1}{a^2-1}$

$\frac{a^2}{a^2-1} = 1 - \frac{1}{1-a^2} < 1$ なので、$\frac{a^2}{a^2-1}$ が-1より大きいかどうかで最大値が変わる $\frac{a^2}{a^2-1} > -1$ となるのは $a^2 < -a^2+1 \Leftrightarrow 0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$ なので

$0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $X = \frac{a^2}{a^2-1}$ で最大 $\frac{1}{1-a^2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq a < 1$ のとき $X = -1$ で最大 $4a^2$

(3) $a=2$ のとき



$f(x) = 3X^2 - 8X + 5$

$= 3\left(X - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$

となる $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき

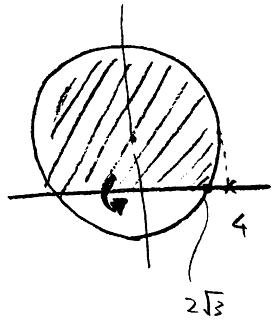
$-1 \leqq X \leqq 1 \quad (\because X = \sin\theta)$

なので $X=-1$ で $f(x)$ は最大となる

$f(-1) = 3 + 8 + 5 = 16$

このとき $P_1(0, -2)$

$\overline{AP_1} = 4$. なので 中心 A. で P_1 を通る円は



$x^2 + (y-2)^2 = 4^2$

$y = \pm\sqrt{16-x^2} + 2$

$V = 2\int_0^4 \pi y_+^2\, dx - 2\int_{2\sqrt{3}}^4 \pi y_-^2\, dx$

$= 2\pi \int_0^4 (\sqrt{16-x^2}+2)^2 dx - 2\pi \int_{2\sqrt{3}}^4 (\sqrt{16-x^2}-2)^2 dx$

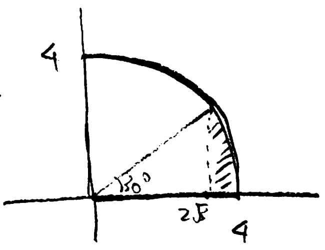
$= 2\pi \int_0^4 20 - x^2\, dx + 8\pi \int_0^4 \sqrt{16-x^2}\, dx - 2\pi \int_{2\sqrt{3}}^4 20 - x^2\, dx$

$+ 8\pi \int_{2\sqrt{3}}^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$

$= 2\pi \left[20x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{2\sqrt{3}} + 8\pi \int_0^4 \sqrt{16-x^2}\, dx + 8\pi \int_{2\sqrt{3}}^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$

$= 2\pi (40\sqrt{3} - 8\sqrt{3}) + 8\pi \times \pi \times 4^2 \times \frac{1}{4}$

$+ 8\pi \{ \pi \times 4^2 \times \frac{30°}{360°} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \}$



$= 64\pi\sqrt{3} + 32\pi^2 + \frac{32}{3}\pi^2 - 16\sqrt{3}$

$= 48\sqrt{3}\pi + \frac{128}{3}\pi$