①

(1) $a_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$

$$= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1) = \frac{4}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{-3+1-4n}{2} \times n$$

$$= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - (2n+1)n$$

$$= \frac{1}{3}n(4n^2+6n+2-6n-3) = \frac{1}{3}n(4n^2-1) = \underline{\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)}$$

(2) $b_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2$

$$= \sum_{k=1}^{n} (2k)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$a_n - b_n = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{3}n(2n+1)\left(2n-1-2n-2\right) = \underline{-n(2n+1)}$$

(3) $$a_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)\left(2n+3-2n\right)$$

$$= (n+1)(2n+1).$$

(i) $n \equiv 0 \pmod 6$ のとき　（以下合同式は全て mod 6 とする）

$C_n \equiv 1 \times 1 \equiv 1$

(ii) $n \equiv 1$ のとき

$C_n \equiv (1+1)(2\times1+1) \equiv 0$

(iii) $n \equiv 2$ のとき

$C_n \equiv (2+1)(2\times2+1) \equiv 3\times5 \equiv 4$

(iv) $n \equiv 3$ のとき

$C_n \equiv (3+1)(2\times3+1) \equiv 4\times1 \equiv 4$

(v) $n \equiv 4$ のとき

$C_n \equiv (4+1)(2\times4+1) \equiv 5\times3 \equiv 3$

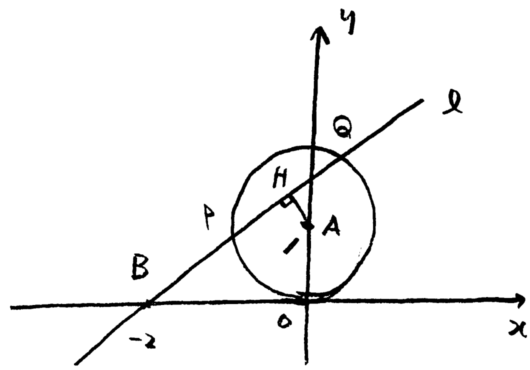
(vi) $n \equiv 5$ のとき

$C_n \equiv (5+1)(2\times5+1) \equiv 0$

以上より $C_n \equiv 0$ となるのは $n \equiv 1$ または $n \equiv 5$.

$\therefore$ $\underline{n = 6k-5,\ 6k-1 \quad (k = 1, 2, 3 \cdots)}$

②



C: $x^2+(y-1)^2=1$

l: $y=k(x+2)$

(1) 距離をdとおくと

$$d=\frac{|k\times 0-1+2k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$$

(2) 円の中心Aとlとの距離dが半径1よりも小さければよい

$$d=\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}<1 \iff |2k-1|<\sqrt{k^2+1}$$

両辺とも必ず正の値をとるので2乗して

$$4k^2-4k+1<k^2+1$$

$$3k^2-4k<0$$

$$\underline{0<k<\frac{4}{3}}$$

(3) Aからlに下ろした垂線の足をHとおくと、AP = AQなので AH ⊥ l

△APHについて、三平方の定理より

$$AP^2=AH^2+PH^2$$

$$1^2=d^2+\left(\frac{PQ}{2}\right)^2$$

$$1=\frac{(2k-1)^2}{k^2+1}+\left(\frac{2\sqrt{k}}{2}\right)^2$$

$$k^2+1=4k^2-4k+1+k^3+k$$

$$k^3+3k^2-3k=0$$

$$k=0,\ \frac{\pm\sqrt{21}-3}{2}$$

(2)より $0<k<\frac{4}{3}$ なので $\underline{k=\frac{\sqrt{21}-3}{2}}$

(4) lの傾きを$\tan\alpha$、ABの傾きを$\tan\beta$とすると、

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{21}-3}{2}, \quad \tan\beta = \frac{1}{2}$$

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\frac{\sqrt{21}-3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{21}-3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{21}-8}{1+\sqrt{21}} = \underline{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}$$

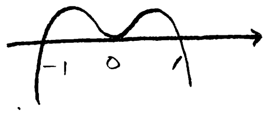
③ $C: x^4-2xy+y^2=0$

(1) yが存在するための条件を考える

$$y^2-2xy+x^4=0 \quad \cdots ①$$

をyの2次方程式としてとらえると、yが存在するための条件は、判別式をDとして、

$$D/4 = x^2-x^4 \geqq 0 \iff x^2(1-x^2)\geqq 0$$



$$\therefore -1\leqq x\leqq 1$$

したがってx座標の最大値は1である。また$x=1$のときyは、

$$y^2-2y+1=0$$

より $y=1$.

よってx座標が最大となる点は $\underline{(x,y)=(1,1)}$

次に①について、$-1\leqq x\leqq 1$のとき、①をyについて解くと

$$y = x\pm\sqrt{x^2-x^4}$$

$\sqrt{x^2-x^4}\geqq 0$なので、yが最大となるのは、

$$y=x+\sqrt{x^2-x^4}$$

を満たすときである。上式右辺を$f(x)$とすると、

$$f'(x) = 1+\frac{1}{2}\times\frac{2x-4x^3}{\sqrt{x^2-x^4}} = \frac{\sqrt{x^2-x^4}+x-2x^3}{\sqrt{x^2-x^4}}$$

$f'(x)=0$となるのは $\sqrt{x^2-x^4}+x-2x^3=0$ のときで

$$\sqrt{x^2-x^4}=2x^3-x$$

$2x^3-x<0$のとき、上式は成り立たない。$2x^3-x\geqq 0$のとき $(-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq 0, x\geqq 1)$

$$x^2-x^4 = x^2(2x^2-1)^2 \iff x^4(4x^2-3)=0$$

$$\iff x=0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

このうち $-1 \leqq x \leqq 1$, かつ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 0$, $x \geqq 1$ を満たすのは

$x = 0, \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって、$f(x)$ のグラフの増減は下のようになる

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
f'	$+$	$+$	0	$+$	0	$-$	$-$
f		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

以上より y が最大となるのは $\underline{(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$

(3) (1)より x が最小となるのは $x = -1$ のとき

また $y = x - \sqrt{x^2 - x^4} = g(x)$ とすると、もとめる面積 S は

$$S = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x + \sqrt{x^2 - x^4} - x + \sqrt{x^2 - x^4}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{x^2 - x^4}\, dx = 4\int_{0}^{1} \sqrt{x^2 - x^4}\, dx$$

$$= 4\int_{0}^{1} x\sqrt{1 - x^2}\, dx = 4\int_{0}^{1} (1 - x^2)' \times \left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$= -2\left[\frac{2}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \underline{\frac{4}{3}}$$

④

(1) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^{\beta} - \log x \cdot \beta x^{\beta-1}}{x^{2\beta}} = \dfrac{x^{\beta-1}(1-\beta\log x)}{x^{2\beta}}$

$1-\beta\log x = 0$ となるのは、$x = e^{\frac{1}{\beta}}$ のとき。

$x^{\beta-1}$, $x^{2\beta}$ は必ず正であり、$1-\beta\log x$ は単調に減少するので、$f(x)$ の

増減は下のようになる

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\beta}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(e^{\frac{1}{\beta}}) = \dfrac{\frac{1}{\beta}}{e} = \dfrac{1}{e\beta}$

よって $f(x)$ は $x = e^{\frac{1}{\beta}}$ のとき極大値 $\dfrac{1}{e\beta}$ をとる

(2) $t>0$ のとき $\dfrac{t^2}{2} < e^{t} \iff t < \sqrt{2}\, e^{\frac{t}{2}} \cdots ①$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{\beta}} < \lim_{x\to\infty}\frac{\log \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}}{x^{\beta}}$ $(\because ①)$

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\frac{\log\sqrt{2} + \frac{x}{2}}{x^{\beta}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\log\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2}}{x^{\beta-1}} = 0$

$x>1$ のとき $\dfrac{\log x}{x^{\beta}} > 0$ なので、はさみうちの原理により

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

(3) $\displaystyle I(a) = \int_1^a \frac{\log x}{x^{\beta}}dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{1-\beta}x^{1-\beta}\log x\right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{1-\beta}x^{1-\beta}\cdot\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle = \frac{1}{1-\beta}a^{1-\beta}\log a - \frac{1}{1-\beta}\int_1^a x^{-\beta}dx$

$\displaystyle = \frac{1}{1-\beta}a^{1-\beta}\log a - \frac{1}{(1-\beta)^2}(a^{1-\beta}-1)$

$$= \frac{1}{(1-\beta)^2}\left\{(1-\beta)a^{1-\beta}\log a - a^{1-\beta}+1\right\}$$

(4) $$I(a) = \frac{(1-\beta)\log a - 1}{(1-\beta)^2 a^{\beta-1}} + \frac{1}{(1-\beta)^2}$$

$$= \frac{\log a}{(1-\beta)a^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-\beta)^2 a^{\beta-1}} + \frac{1}{(1-\beta)^2}$$

ここで $$\frac{\log a}{(1-\beta)a^{\beta-1}} = \frac{\frac{\beta}{\beta-1}\log a^{\frac{\beta-1}{\beta}}}{(1-\beta)\left(a^{\frac{\beta-1}{\beta}}\right)^{\beta}}$$

$a^{\frac{\beta-1}{\beta}} = t$ とすると

$$上式 = \frac{-\beta \log t}{(1-\beta)^2 t^{\beta}}$$

(2)より、$\frac{\log t}{t^{\beta}} \to 0$ なので 上式は 0 に収束する.

よって

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = -0 - 0 + \frac{1}{(1-\beta)^2} = \frac{1}{(1-\beta)^2}$$