① (1) $S(n)=\sum_{k=1}^{6n}k^2=\frac{1}{6}\times 6n\times(6n+1)(12n+1)=\underline{n(6n+1)(12n+1)}$

(2) $S(m)-S(n)=m(6m+1)(12m+1)-n(6n+1)(12n+1)$

$=72m^3+18m^2+m-72n^3-18n^2-n$

$=72(m-n)(m^2+mn+n^2)+18(m+n)(m-n)+(m-n)$

$=(m-n)\left(72m^2+72mn+72n^2+18m+18n+1\right)$

$T(m,n)=\underline{72m^2+72mn+72n^2+18m+18n+1}$

(3) $2018=2\times1009=(m-n)T(m,n)$

また $m>n+1$ より $m-n>1$ だから. $m-n$ は 2 または 1009 または 2018.

m,n は自然数なので. $n\geqq1$. $m>n+1=2$ $\therefore m\geqq3$. $n\geqq1$

$T(m,n)\geqq72\times3^2+72\times3\times1+72\times1^2+18\times3+18\times1+1>2$

よって. $m-n=2$. $T(m,n)=1009$ に限られる

$m=2+n$ を代入して

$T(2+n,n)=72(n+2)^2+72(n+2)n+72n^2+18(n+2)+18n+1$

$=216n^2+468n+325=1009$

$\Leftrightarrow\ 36n(6n+13)=684=36\times19$

$\Leftrightarrow\ 6n+13=19$

$\Leftrightarrow\ n=1.\quad m=2+1=3.$

よって $\underline{(m,n)=(3,1)}$

②

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\ y-\sqrt{3}\\ z\end{pmatrix} = x-3+\sqrt{3}y-3 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x+\sqrt{3}y = 8 \quad \cdots ①$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = (x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2+z^2 = 2^2 \quad \cdots ②$$

(1) $t = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\ y-\sqrt{3}\\ z\end{pmatrix} = 2x-6$ $\qquad$ $\underline{t=2x-6}$

(2) ①より $\underline{x+\sqrt{3}y=8}$

②より $\underline{(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2+z^2=4}$

(3) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\ y-\sqrt{3}\\ z\end{pmatrix} = 3(x-3)+\sqrt{3}(y-\sqrt{3})$

$= 3x+\sqrt{3}y-12 = 3x+(8-x)-12$ $\qquad (\because ①)$

$= 2x-4 = t+2$ $\qquad (\because (1))$ $\qquad$ $\underline{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC} = t+2}$

(4) ①より $y = \dfrac{8}{\sqrt{3}} - \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ を②に代入

$$(x-3)^2 + \left(\frac{8}{3}\sqrt{3} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + z^2 = 2^2$$

$$x^2-6x+9+\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+\frac{25}{3}+z^2=4$$

$$\frac{4}{3}x^2-\frac{28}{3}x+z^2+\frac{40}{3}=0$$

$$4x^2-28x+3z^2+40=0 \quad \cdots ③$$

$$4\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 = 9-3z^2 \leqq 9$$

$$-\frac{3}{2} \leqq x-\frac{7}{2} \leqq \frac{3}{2}$$

$$-3 \leqq 2x-7 \leqq 3$$

$$-2 \leqq 2x-6 \leqq 4$$

$$-2 \leqq t \leqq 4$$

証明終

$t=4$ のとき $2x-6=4$ より $x=5$. ③より $z=0$. $y = \dfrac{8}{\sqrt{3}} - \dfrac{5}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\therefore$ $\underline{C(5, \sqrt{3}, 0)}$

(5) $|\overrightarrow{OC}|^2 = x^2+y^2+z^2$

③より $z^2 = -\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{28}{3}x-\dfrac{40}{3}$ を代入

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = -\frac{1}{3}x^2+\frac{28}{3}x-\frac{40}{3}+y^2$$

①より $y = \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}}$ を代入

$$|\vec{OC}|^2 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{28}{3}x - \frac{40}{3} + \left(\frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= 4x + 8$$

$$= 2t + 20$$

$\therefore\ |\vec{OC}| = \sqrt{2t+20}$

$-2 \leqq t \leqq 4$ より、$t = 4$ のとき $|\vec{OC}|$ は最大値 $2\sqrt{7}$ をとる.

③ (1) $p^2=r^2\cos^2\beta$ と $q^2=r^2\sin^2\beta$ を辺々加えて

$p^2+q^2=r^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=r^2$　　$\therefore\ r=\sqrt{p^2+q^2}$

左辺 $=r\sin(\alpha+\beta)$

$=r\sin\alpha\cos\beta+r\cos\alpha\sin\beta=(r\cos\beta)\sin\alpha+(r\sin\beta)\cos\alpha=p\sin\alpha+q\cos\alpha=$ 右辺

証明終

(2) $f(\theta)=a\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$

$=\frac{a}{2}(1+\cos2\theta)+\sin2\theta+\frac{b}{2}(1-\cos2\theta)$

$=\sin2\theta+\frac{1}{2}(a-b)\cos2\theta+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$

$=\sqrt{1+\frac{1}{4}(a-b)^2}\ \sin(2\theta+\varphi)+\frac{1}{2}(a+b)$

(ただし φ は $\tan\varphi=\frac{1}{2}(a-b)$ を満たす角で $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ の範囲の実数)

$-4\pi+\varphi\leqq2\theta+\varphi\leqq4\pi+\varphi$ より　$-1\leqq\sin(2\theta+\varphi)\leqq1$

よって　$-\sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2+1}+\frac{1}{2}(a+b)\leqq f(\theta)\leqq\sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2+1}+\frac{1}{2}(a+b)$

$m=\frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2+1}$,　$M=\frac{1}{2}(a+b)+\sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2+1}$

(3) (2) より $m\geqq0$ となればよいので

$\frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2+1}\geqq0$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}(a+b)\geqq\sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2+1}$

$\Leftrightarrow\ a+b\geqq0$ かつ $\frac{1}{4}(a+b)^2\geqq\frac{1}{4}(a-b)^2+1$

$\Leftrightarrow\ \underline{a+b\geqq0 \text{ かつ } ab\geqq1}$

(4) (2) より $M\leqq0$ となればよい

$\frac{1}{2}(a+b)+\sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2+1}\leqq0$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2+1}\leqq-\frac{1}{2}(a+b)$

$\Leftrightarrow\ a+b\leqq0$ かつ $\frac{1}{4}(a-b)^2+1\leqq\frac{1}{4}(a+b)^2$

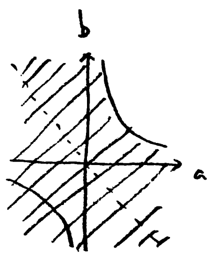
$\Leftrightarrow\ a+b\leqq0$ かつ $ab\geqq1$

(5) $m<0$ かつ $M>0$ となればよい

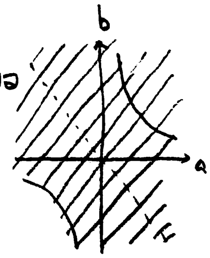
(3), (4) より　$m<0\ \Leftrightarrow\ a+b<0$ または $ab<1$ …①

$M>0\ \Leftrightarrow\ a+b>0$ または $ab<1$ …②

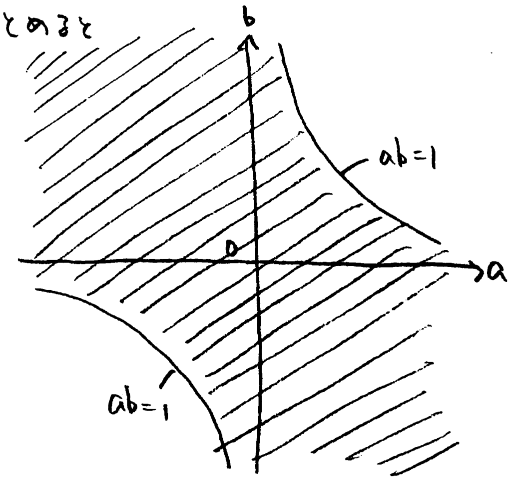
①は



②は



まとめると



左図 斜線部

(境界は除く)

④ (1) $x = r\cos\theta = e^{a\theta}\cos\theta,\quad y = r\sin\theta = e^{a\theta}\sin\theta$

(2) $\dfrac{dx}{d\theta} = ae^{a\theta}\cos\theta - e^{a\theta}\sin\theta,\quad \dfrac{dy}{d\theta} = ae^{a\theta}\sin\theta + e^{a\theta}\cos\theta$

長さを L とすると、

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{e^{2a\theta}\left(a^2\cos^2\theta - 2a\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + 2a\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right)}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} e^{a\theta}\sqrt{a^2+1}\, d\theta$$

$$= \left[\sqrt{a^2+1} \times \frac{1}{a}e^{a\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}e^{a\pi} - \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\left(e^{a\pi}-1\right)$$

(3) $(e^{a\theta}\cos\theta, e^{a\theta}\sin\theta)$ を通って $\left(\dfrac{dx}{d\theta}, \dfrac{dy}{d\theta}\right)$ と垂直な $\left(\dfrac{dy}{d\theta}, -\dfrac{dx}{d\theta}\right)$ を法線ベクトルにもつ直線

$$e^{a\theta}(a\sin\theta + \cos\theta)(x - e^{a\theta}\cos\theta) - e^{a\theta}(a\cos\theta - \sin\theta)(y - e^{a\theta}\sin\theta) = 0$$

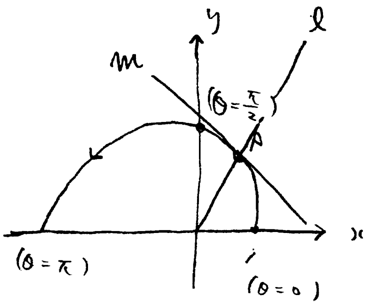
$$e^{a\theta}(a\sin\theta + \cos\theta)x + e^{a\theta}(\sin\theta - a\cos\theta)y - e^{2a\theta} = 0$$

$$(a\sin\theta + \cos\theta)x + (\sin\theta - a\cos\theta)y = e^{a\theta}$$

(4) $\overrightarrow{OP}$ は $(\cos\theta, \sin\theta)$ と平行だから、

ℓ の法線ベクトルは $(\sin\theta, -\cos\theta)$、

(これを $\vec{\ell}$ とおく)



また(3)より m の法線ベクトルとして

$\vec{m} = (a\sin\theta + \cos\theta,\ \sin\theta - a\cos\theta)$ を考える。

$|\vec{\ell}| = 1,\quad |\vec{m}|^2 = a^2\sin^2\theta + \cancel{2a\cos\theta\sin\theta} + \cos^2\theta + \sin^2\theta - \cancel{2a\cos\theta\sin\theta} + a^2\cos^2\theta = a^2+1$

$\vec{\ell}\cdot\vec{m} = a\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta + a\cos^2\theta = a$

$\vec{\ell}$ と $\vec{m}$ のなす角を φ とすると

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\ell}\cdot\vec{m}}{|\vec{\ell}||\vec{m}|} = \frac{a}{1\cdot\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

となり、θ の値にかかわらず一定値をとる。つまり ℓ と m のなす角は一定値をとる

(5) (4) より $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \cos\dfrac{\pi}{12}$

$\cos^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ で. $a>0$ だから.

$$\frac{a^2}{a^2+1} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$4a^2 = 2a^2 + \sqrt{3}a^2 + 2 + \sqrt{3}$$

$$(2-\sqrt{3})a^2 = 2+\sqrt{3}$$

$$a^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^2$$

$$\underline{a = 2+\sqrt{3}}$$

⑤ (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1 \log(x+1)\{\log(x+1)\}'dx = \left[\frac{1}{2}\{\log(x+1)\}^2\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{2}(\log 2)^2}$ //

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}dx = \left[-\log(x+1)\frac{1}{x+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\log 2 + \left[-\frac{1}{(x+1)}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{2}(1-\log 2)}$ //

(3) $h>0$ だから、与不等式を h 倍して整理する

$\displaystyle \frac{h}{x} - \left(\frac{h}{x}\right)^2 < \log\left(1+\frac{h}{x}\right) < \frac{h}{x}$ …①

これを証明する

$\displaystyle\frac{h}{x} = t$ とおくと $x>0$, $h>0$ より $t>0$ であり ①は

$t - t^2 < \log(1+t) < t$ ②

となる

$t - \log(1+t) = f(t)$ とおくと、

$\displaystyle f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} > 0$

よって $f(t)$ は単調に増加する。また $f(0) = 0 - \log 1 = 0$ だから

$f(t) > f(0) = 0$

よって $f(t) > 0$. すなわち $\log(1+t) < t$ が成り立つ。

次に

$\log(1+t) - (t - t^2) = g(t)$ とおく。

$\displaystyle g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + 2t = \frac{1-1-t+2t+2t^2}{1+t} = \frac{2t^2+t}{1+t} > 0$

$g(0) = 0 - 0 + 0 = 0$

よって $g(t) > g(0) = 0$ であり $t - t^2 < \log(1+t)$ が成り立つ。

以上より、①が成り立つことが示された

よって題意の不等式が成り立つことが示された. 証明終

(4) (3)で $x = k+n$, $h = 1$ とすると、

$$\frac{1}{k+n} - \frac{1}{(k+n)^2} < \log\frac{k+n+1}{k+n} < \frac{1}{k+n}$$

辺々に $\log\frac{k+n}{n}$ をかける

$$\left\{\frac{1}{k+n}-\frac{1}{(k+n)^2}\right\}\log\frac{k+n}{n}<\left(\log\frac{k+n+1}{k+n}\right)\log\frac{k+n}{n}<\frac{1}{k+n}\log\frac{k+n}{n}$$

$k=1\sim n$ まで辺々足し合わせる

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k+n}-\frac{1}{(k+n)^2}\right\}\log\frac{k+n}{n}}_{=A}<\sum_{k=1}^{n}\left(\log\frac{k+n+1}{k+n}\right)\log\frac{k+n}{n}<\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}\log\frac{k+n}{n}}_{=B}$$

$$\lim_{n\to\infty}A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\frac{k}{n}+1}-\frac{\frac{1}{n}}{(\frac{k}{n}+1)^2}\right\}\log\left(\frac{k}{n}+1\right)=\int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x}dx=\frac{1}{2}(\log 2)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}B=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n}+1}\log\left(\frac{k}{n}+1\right)=\int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x}dx=\frac{1}{2}(\log 2)^2$$

よって、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\log\frac{k+n+1}{k+n}\right)\log\frac{k+n}{n}=\underline{\frac{1}{2}(\log 2)^2}$$

① (1) $S(n)=\sum_{k=1}^{6n}k^2=\frac{1}{6}\times 6n\times(6n+1)(2\cdot 6n+1)=n(6n+1)(12n+1)$

(2) $S(m)-S(n)=m(6m+1)(12m+1)-n(6n+1)(12n+1)$

$=72m^3-72n^3+18m^2-18n^2+m-n$

$=72(m-n)(m^2+mn+n^2)+18(m-n)(m+n)+m-n$

$=(m-n)(72m^2+72mn+72n^2+18m+18n+1)$

よって $T(m,n)=72m^2+72mn+72n^2+18m+18n+1$

(3) $S(m)-S(n)=2018$

$\Leftrightarrow\quad (m-n)T(m,n)=2\times 1009\ \cdots(*)$

m,nは、$m>n+1$を満たす自然数だから、$m-n$, $T(m,n)$はいずれも正の整数。

なので、$(*)$が成り立つのは

$(m-n,\ T(m,n))=(1,2018),(2,1009),(1009,2),(2018,1)$

の4通り。

(i) $m-n=1$, $T(m,n)=2018$ のとき

$m=n+1$ だから $T(m,n)=T(n+1,n)$

$=72(n+1)^2+72(n+1)n+72n^2+18(n+1)+18n+1$

$=2\{36(n+1)^2+36(n+1)n+36n^2+9(n+1)+9n\}+1$

となり、$T(m,n)$は必ず奇数となるので $T(m,n)\neq 2018$.

したがって、$m-n=1$, $T(m,n)=2018$ を満たす m,nは存在しない

(ii) $m-n=2$, $T(m,n)=1009$ のとき

$m=n+2$ だから 1008

$T(m,n)=72(n+2)^2+72(n+2)n+72n^2+18(n+2)+18n+1$ 56

$=18\{4(n+2)^2+4(n+2)n+4n^2+n+2+n\}+1=1009$

$\Leftrightarrow\quad 4(n+2)^2+4(n+2)n+4n^2+2n+2=56$

$\Leftrightarrow\quad 2n^2+8n+8+2n^2+4n+2n^2+n+1=28$ 6 +19

$\Leftrightarrow\quad 6n^2+13n-19=0$ 1 −1

$\Leftrightarrow\quad (6n+19)(n-1)=0$.

nは自然数だから $n=1$. このとき $m=3$.

$(m, n)=(3,1)$.

(iii) $m-n=1009$, $T(m,n)=2$ のとき

$T(m,n) > 72+72+72+18+18+1 > 2$ だから これを満たす (m,n) は存在しない.

(iv) $m-n=2018$, $T(m,n)=1$ のとき

(iii)と同様. (m,n) は存在しない.

(i)〜(iv)より. $(m,n)=(3,1)$

② (1) $t = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\y-\sqrt{3}\\z-0\end{pmatrix} = 2(x-3)$ $\qquad \therefore\ \underline{t = 2(x-3)}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\y-\sqrt{3}\\z\end{pmatrix} = x-3+\sqrt{3}y-3 = 2$ $\qquad \therefore\ \underline{x+\sqrt{3}y = 8.}$

$|\overrightarrow{BC}|^2 = (x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2+z^2 = 2^2$ $\qquad \underline{(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2+z^2 = 4}$

(3) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\y-\sqrt{3}\\z\end{pmatrix} = 3(x-3)+\sqrt{3}y-3$

ここに (2) より $\sqrt{3}y = 8-x$ を代入

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC} = 3x-12+8-x = 2x-4$

ここに (1) より $x = \frac{1}{2}t+3$ を代入.

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC} = t+2$ $\qquad \underline{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC} = t+2}$

(4) $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2+z^2=4$ に $y = \frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}x$ を代入.

$x^2-6x+9+\frac{1}{3}(-x+5)^2+z^2=4$

$3x^2-18x+27+x^2-10x+25 = 12-3z^2$

$4x^2-28x+40 = -3z^2 \leqq 0.$

$x^2-7x+10 \leqq 0$

$(x-2)(x-5) \leqq 0$

$2 \leqq x \leqq 5$

このとき $\quad -1 \leqq x-3 \leqq 2$

$-2 \leqq 2(x-3) \leqq 4$

となるので $-2 \leqq t \leqq 4$ であることが分かる

$t=4$ となるのは $x=5$ のときで、このとき、$y = \frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$(5-3)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+z^2=4$ より. $z=0$.

$t=4$ のとき $\underline{C(5,\sqrt{3},0)}$

(5) $|\overrightarrow{OC}|^2 = x^2+y^2+z^2$

$= x^2+y^2+4-(x-3)^2-(y-\sqrt{3})^2$ $\qquad (\because\ z^2 = 4-(x-3)^2-(y-\sqrt{3})^2)$

$= 6x+2\sqrt{3}y-8$

$= 6x+2(8-x)-8$ $\qquad (\because\ \sqrt{3}y = 8-x)$

$= 4x+8$

$2 \leqq x \leqq 5$ だから.

$$16 \leqq 4x+8 \leqq 28$$

$$4 \leqq |\overrightarrow{OC}| \leqq 2\sqrt{7}.$$

$|\overrightarrow{OC}|$の最大値は $2\sqrt{7}$

③ (1) $p = r\cos\beta$ および $q = r\sin\beta$ を2乗して辺々加えると、

$$p^2+q^2 = r^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)$$

$$\therefore\quad r = \sqrt{p^2+q^2}$$

$$r\sin(\alpha+\beta) = r(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$= r\left(\sin\alpha\,\frac{p}{r}+\cos\alpha\,\frac{q}{r}\right)$$
$$= p\sin\alpha+q\cos\alpha.$$

証明終

(2) $f(\theta) = \frac{1}{2}a(1+\cos2\theta)+\sin2\theta+\frac{1}{2}b(1-\cos2\theta)$

$$= \frac{a-b}{2}\cos2\theta+\sin2\theta+\frac{a+b}{2}$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}\sin(2\theta+\phi)+\frac{a+b}{2}$$

ただし ϕ は $\tan\phi = \frac{a-b}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ だから $\phi \leqq 2\theta+\phi \leqq 4\pi+\phi$ であり、このとき $-1 \leqq \sin(2\theta+\phi) \leqq 1$ となるので

$$-\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+1}+\frac{a+b}{2} \leqq f(\theta) \leqq \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+1}+\frac{a+b}{2}$$

$$\underline{m = \frac{a+b}{2}-\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+1},\quad M = \frac{a+b}{2}+\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+1}}$$

(3) $m \geqq 0$ となれば良いので $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+1}$ …①

$a+b \geqq 0$ のとき 両辺2乗して $\frac{a^2+2ab+b^2}{\cancel{4}} \geqq \frac{a^2-2ab+b^2}{\cancel{4}}+\cancel{1}$ 4

$ab \geqq 1$

$a+b<0$ のとき ① を満たす (a, b) は存在しない。

よって $\underline{a+b \geqq 0 \text{ かつ } ab \geqq 1}$

(4) $M \leqq 0$ となれば良い。 $-\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqq \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+1}$ …②

$a+b>0$ のとき ② を満たす (a, b) は存在しない

$a+b \leqq 0$ のとき 両辺2乗して $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geqq \frac{a^2-2ab+b^2}{4}+1$

$ab \geqq 1$

$\therefore\quad \underline{a+b \leqq 0 \text{ かつ } ab \geqq 1}$

(5) $m<0$ かつ $M>0$ となれば良い。

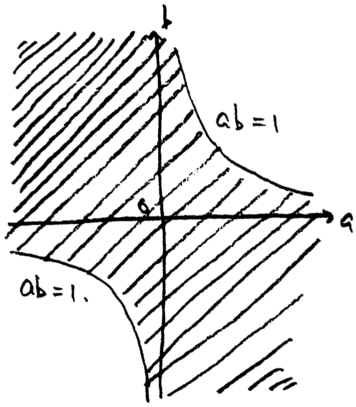
$\Leftrightarrow \quad \dfrac{a+b}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+1}<0$ かつ $\dfrac{a+b}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+1}>0$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+1}<\dfrac{a+b}{2}<\sqrt{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+1}$

$\Leftrightarrow \quad \left|\dfrac{a+b}{2}\right|<\sqrt{\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+1}$

$\Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2<\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+1$

$\Leftrightarrow \quad ab<1$



よって条件は $ab<1$ で、

領域は右図斜線部(境界は除く)

④ (1) $x = r\cos\theta = e^{a\theta}\cos\theta$, $y = r\sin\theta = e^{a\theta}\sin\theta$

$$\underline{(x, y) = (e^{a\theta}\cos\theta,\ e^{a\theta}\sin\theta)}$$

(2) $\dfrac{dx}{d\theta} = ae^{a\theta}\cos\theta - e^{a\theta}\sin\theta$. $\dfrac{dy}{d\theta} = ae^{a\theta}\sin\theta + e^{a\theta}\cos\theta$

長さをLとすると

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{a^2e^{2a\theta}\cos^2\theta - \cancel{2ae^{2a\theta}\sin\theta\cos\theta} + e^{2a\theta}\sin^2\theta + a^2e^{2a\theta}\sin^2\theta + \cancel{2ae^{2a\theta}\sin\theta\cos\theta} + e^{2a\theta}\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{a^2e^{2a\theta} + e^{2a\theta}}\, d\theta = \int_0^\pi \sqrt{a^2+1}\, e^{a\theta} d\theta$$

$$= \sqrt{a^2+1}\left[\frac{1}{a}e^{a\theta}\right]_0^\pi = \sqrt{a^2+1}\left(\frac{e^{a\pi}}{a} - \frac{1}{a}\right) = \underline{\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}(e^{a\pi} - 1)}$$

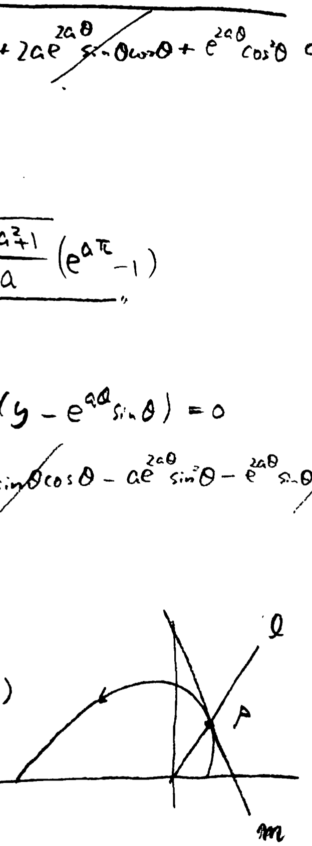
(3) $\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)(x - e^{a\theta}\cos\theta) - \left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)(y - e^{a\theta}\sin\theta) = 0$

$(ae^{a\theta}\sin\theta + e^{a\theta}\cos\theta)(x - e^{a\theta}\cos\theta) - (ae^{a\theta}\cos\theta - e^{a\theta}\sin\theta)(y - e^{a\theta}\sin\theta) = 0$

$e^{a\theta}(a\sin\theta + \cos\theta)x - e^{a\theta}(a\cos\theta - \sin\theta)y - ae^{2a\theta}\cos^2\theta + \cancel{e^{2a\theta}\sin\theta\cos\theta} - ae^{2a\theta}\sin^2\theta - \cancel{e^{2a\theta}\sin\theta\cos\theta} = 0$

$$\underline{(a\sin\theta + \cos\theta)x - (a\cos\theta - \sin\theta)y = ae^{a\theta}}$$

(4) lの方向ベクトルは $(e^{a\theta}\cos\theta,\ e^{a\theta}\sin\theta)$ ($\vec{l}$とする)



mの方向ベクトルは $(a\cos\theta - \sin\theta,\ a\sin\theta + \cos\theta)$ ($\vec{m}$とする)

$\vec{l}\cdot\vec{m} = ae^{a\theta}\cos^2\theta - e^{a\theta}\cos\theta\sin\theta + ae^{a\theta}\sin^2\theta + e^{a\theta}\cos\theta\sin\theta$

$= ae^{a\theta}$

$|\vec{l}| = e^{a\theta}$, $|\vec{m}| = \sqrt{a^2\cos^2\theta - 2a\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + 2a\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta} = \sqrt{a^2+1}$

$\vec{l}$と$\vec{m}$のなす角をXとして.

$$\cos X = \frac{\vec{l}\cdot\vec{m}}{|\vec{l}||\vec{m}|} = \frac{ae^{a\theta}}{e^{a\theta}\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

となるので、Xは一定値であり、lとmは常に一定の角をなす.

(5) lとmのなす角が$\frac{\pi}{12}$だから.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

両辺2乗

$$\frac{a^2}{a^2+1} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}+\overset{1}{\cancel{4}}\sqrt{3}}{\underset{4}{\cancel{16}}}$$

$$4a^2 = (2+\sqrt{3})(a^2+1)$$

$$(2+\sqrt{3})a^2 = 2+\sqrt{3}.$$

$$a^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^2$$

$$\underline{a = 2+\sqrt{3} \quad (\because a>0)}$$

⑤ (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1 \log(x+1)\{\log(x+1)\}'dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}\{\log(x+1)\}^2\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{2}(\log 2)^2}$ //

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}dx = \left[-\frac{1}{(x+1)^1}\log(x+1)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\times\frac{1}{x+1}dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\log 2 - \left[\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(1-\log 2)$

(3) $f(x) = \log x$ とおく. $(x>0)$

$[x, x+h]$ において平均値の定理より

$\displaystyle\frac{\log(x+h)-\log x}{x+h-x} = f'(c) = \frac{1}{c}$ $\quad\cdots$① $\quad (x<c<x+h)$

を満たす c が少なくとも1つ存在する.

また $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ だから $f'(x)$ は単調減少で

$x<c<x+h$ より $\quad \displaystyle\frac{1}{x+h} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ $\quad\cdots$②

①, ② より

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\log(x+h)-\log x}{h} < \frac{1}{x} \quad\cdots③$$

$\dfrac{1}{x+h}$ と $\dfrac{1}{x} - \dfrac{h}{x^2}$ について

$$\frac{1}{x+h} - \left(\frac{1}{x} - \frac{h}{x^2}\right) = \frac{x^2 - x(x+h) + h(x+h)}{x^2(x+h)} = \frac{h^2}{x^2(x+h)} > 0$$

となるので $\quad \displaystyle\frac{1}{x+h} > \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2}$ $\quad\cdots$④

③, ④ より $\quad \displaystyle\frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} < \frac{\log(x+h)-\log x}{h} < \frac{1}{x}$ $\qquad$ 証明終

(4) (3) で $x = n+k$, $h=1$ とおくと,

$$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{(n+k)^2} < \log\frac{n+k+1}{n+k} < \frac{1}{n+k}$$

各辺に $\log\dfrac{k+n}{n}$ を掛けて,

$$\left\{\frac{1}{n+k} - \frac{1}{(n+k)^2}\right\}\log\frac{k+n}{n} < \log\frac{n+k+1}{n+k}\log\frac{k+n}{n} < \frac{1}{n+k}\log\frac{k+n}{n}$$

$k=1$～nまで変化させたものを加えて

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{\frac{1}{n+k}-\frac{1}{(n+k)^2}\right\}\log\frac{k+n}{n}\right]}_{⑤} < \sum_{k=1}^{n}\left\{\log\frac{n+k+1}{n+k}\log\frac{k+n}{n}\right\} < \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{n+k}\log\frac{k+n}{n}\right\}}_{⑥} \quad \cdots (X)$$

⑥について

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\log\frac{k+n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\log\left(\frac{k}{n}+1\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\log(1+x)\,dx = \frac{1}{2}(\log 2)^2 \qquad (\because (1)) \qquad \cdots ⑦$$

⑤について

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{\frac{1}{n+k}-\frac{1}{(n+k)^2}\right\}\log\frac{k+n}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right] = (*)$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1\frac{\log(1+x)}{(1+x)^2}dx = \frac{1}{2}(1-\log 2)$

だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) = 0$.

よって

$$(*) = \int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x}dx = \frac{1}{2}(\log 2)^2 \qquad \cdots ⑧$$

(X), ⑦⑧より はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)\log\frac{k+n}{n} = \underline{\frac{1}{2}(\log 2)^2}_{\,//}$$