①

(1) $S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x-\bar{x})(y-\bar{y})$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(xy - \bar{x}y - \bar{y}x + \bar{x}\bar{y})$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z - \frac{1}{n}\bar{x}\sum_{k=1}^{n} y - \frac{1}{n}\bar{y}\sum_{k=1}^{n} x + \frac{1}{n}\times\bar{x}\bar{y}\sum_{k=1}^{n} 1 = (*)$

ここで $\bar{z},\bar{x},\bar{y}$ の定義より、

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x$ , $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y$ , $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z$

などを代入。

$(*) = \bar{z} - \bar{x}\bar{y} - \bar{y}\bar{x} + \bar{x}\bar{y}\times\frac{1}{n}\times n$

$= \bar{z} - \bar{x}\bar{y}$

$=$ 右辺 証明終

(2) $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{R_n(k-1)+1\} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{k-1+1\} = \frac{1}{2}(n+1)$

$l$はnの約数なので $ln'=n$ とおくことができる。(n'は1以上の整数)

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{R_l(k-1)+1\}$

$= \frac{1}{n}\{R_l(0)+R_l(1)+R_l(2)+\cdots+R_l(l)+R_l(l+1)+\cdots+R_l(n-1)+n\}$

$= \frac{1}{n}\{0+1+2+\cdots+(l-1)+0+1+\cdots+(l-1)+n\}$

$= \frac{1}{n}\times\frac{1}{2}l(l+1)\times n' = \frac{1}{2}(l+1)$

$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(R_l(k-1)+1)(R_n(k-1)+1)$

$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\times k + \sum_{k=1}^{l} k\times(k+l) + \cdots + \sum_{k=1}^{l} k(k+l(n'-1))\right)$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{l}\left(n'k^2 + kl\times\frac{1}{2}n'(n'-1)\right)$

$= \frac{1}{n}\left\{n'\times\frac{1}{6}l(l+1)(2l+1) + \frac{1}{2}l n'(n'-1)\times\frac{1}{2}l(l+1)\right\}$

$$= \frac{1}{n}\left\{ \frac{1}{6} n(\ell+1)(2\ell+1) + \frac{1}{4} n (n'-1)(\ell+1) \right\}$$

$$= \frac{1}{12}(\ell+1)\left( 2(2\ell+1) + 3(n'-1) \right)$$

②

(1) $\beta = \frac{3}{4} \times \frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}} = 0$ より $z+\bar{z}=0$

これは $z$ が純虚数であることを示している.

(2) $z = x+yi$ とおく.

$$\alpha = \frac{3}{2}x \quad \cdots ①$$

$$\beta = \frac{3x}{2(x^2+y^2)} \quad \cdots ②$$

$\beta$ が自然数であるためには $\beta \geqq 1$ であることが必要.

$$\frac{3x}{2(x^2+y^2)} \geqq 1 \iff x^2+y^2 \leqq \frac{3}{2}x \iff \left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2 \leqq \frac{9}{16} \quad \cdots ③$$

③より $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 \leqq \frac{9}{16} \iff -\frac{3}{4} \leqq x-\frac{3}{4} \leqq \frac{3}{4} \iff 0 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$

が必要で. ①をこれに代入すると $0 \leqq \alpha \leqq \frac{9}{4}$. すなわち. $\alpha$ は 1 または 2.

$\alpha=1$ とすると $x=\frac{2}{3}$. これを②に代入して.

$$\beta = \frac{2}{2\left(\frac{4}{9}+y^2\right)} = \frac{9}{4+9y^2}$$

$4+9y^2 \geqq 4$ なので $\frac{9}{4+9y^2} \leqq \frac{9}{4}$. よって $\beta$ は 1 または 2

$\beta=1$ のとき. $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. $\beta=2$ のとき $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{6}$

$\alpha=2$ とすると $x=\frac{4}{3}$. これを②に代入して

$$\beta = \frac{4}{2\left(\frac{16}{9}+y^2\right)} = \frac{18}{16+9y^2}$$

同様に $16+9y^2$ が 18 の約数だから. $16+9y^2=18$. $\iff y^2=\frac{2}{9}$. $\iff y=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

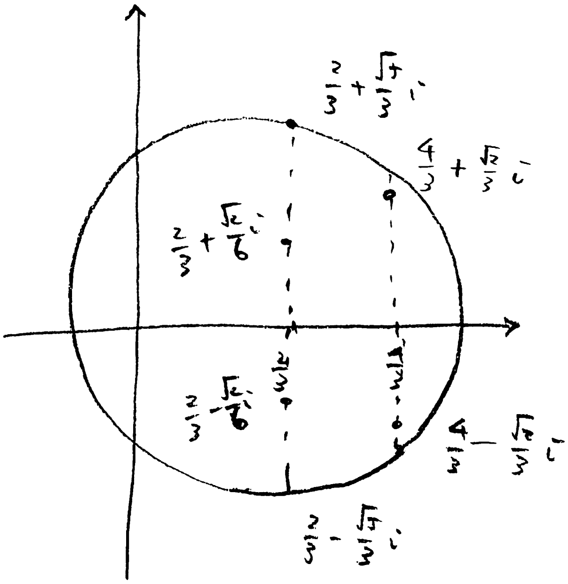
以上をまとめて

$$z = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i,\ \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i,\ \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(3)

$C$を

$(x-a)^2+y^2=r^2$ と表す.




$C$は4点を含む円のうちで最小のものなので, $\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{5}}{3}i$ が$C$上にあることは明らか.

$$\left(\frac{2}{3}-a\right)^2+\frac{5}{9}=r^2 \quad \cdots ④$$

また, $\frac{4}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i$ は$C$の内側にあるので

$$\left(\frac{4}{3}-a\right)^2+\frac{2}{9}\leqq r^2 \quad \cdots ⑤$$

④かつ⑤を満たす$r$のうちで最小のものをもとめる.

④,⑤より $\left(\frac{4}{3}-a\right)^2+\frac{2}{9}\leqq\left(\frac{2}{3}-a\right)^2+\frac{5}{9}$

$\iff \quad a\geqq\frac{3}{4}$

④より $r^2=\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9} \geqq \left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}=\frac{1}{12^2}+\frac{5}{9}=\frac{9}{16}$

$r=\frac{3}{4}$.

$C$の中心は $\frac{3}{4}$, 半径は $\frac{3}{4}$

③

(1) $\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$

$= \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$

$= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$=$ 右辺　　　　証明終

(2)

$y = b\sin 3t = b(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

$x = a\cos 2t = a(1 - 2\sin^2 t) \iff \sin^2 t = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{3}$ のとき $\sin t \geqq 0$. また $x = a\cos 2t$ より $-\frac{a}{2} \leqq x \leqq a$

なので $-\frac{1}{2} \leqq \frac{x}{a} \leqq 1 \iff 0 \leqq 1 - \frac{x}{a} \leqq \frac{3}{2}$

よって $\sin t = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}$ これを $y$ の式に代入

$\underline{y = b\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}\left(1 + \frac{2x}{a}\right)}$ // $\left(-\frac{a}{2} \leqq x \leqq a\right)$

(3) $f(x) = b\left(1 + \frac{2x}{a}\right)\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}$ とおく.

$f'(x) = \frac{2b}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)} + \frac{b}{a}(2x + a) \times \frac{1}{2} \times \frac{-\frac{1}{2a}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}}$

$= \frac{2b}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)} - \frac{b}{\cancel{4a}_{\,2a}}(2x + a)\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}}{\cancel{\frac{1}{2}} \times \frac{a - x}{\cancel{a}}}$

$= \frac{b}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}\left(2 - \frac{1}{2}(2x + a) \times \frac{1}{a - x}\right)$

$= \frac{b}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)} \times \frac{3(a - 2x)}{2(a - x)}$

$= \frac{3b(a - 2x)}{2a(a - x)}\sqrt{\frac{a - x}{2a}}$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{a}{2}$

$f(x)$ の増減は下のようになる.

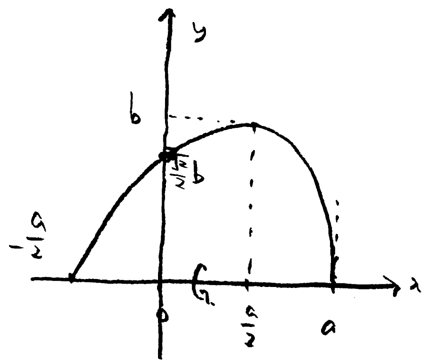
| $x$ | $-\frac{a}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{a}{2}$ | $\cdots$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

$f(-\frac{a}{2}) = 0$

$f(\frac{a}{2}) = 2b \times \frac{1}{2} = b$

$f(a) = 0$

グラフの概形は下のようになる




$x=0$ のとき、

$t = \frac{\pi}{4}$ で、このとき

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}b$

(4)

$$V = \pi\int_{-\frac{a}{2}}^{a} y^2\,dx = \pi\int_{-\frac{a}{2}}^{a} b^2 \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{2x}{a}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi b^2}{2a^3}\int_{-\frac{a}{2}}^{a}(a-x)(2x+a)^2\,dx$$

$$= \frac{\pi b^2}{2a^3}\int_{-\frac{a}{2}}^{a}(2x+a)^2(2x+a-3a)\times\left(-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{\pi b^2}{4a^3}\int_{-\frac{a}{2}}^{a}(2x+a)^3-3a(2x+a)^2\,dx$$

$$= -\frac{\pi b^2}{4a^3}\left[\frac{1}{8}(2x+a)^4 - a(2x+a)^3\times\frac{1}{2}\right]_{-\frac{a}{2}}^{a}$$

$$= -\frac{\pi b^2}{4a^3}\left(\frac{3^4}{8}a^4 - \frac{3^3}{2}a^4\right) = -\frac{\pi b^2}{4a^3}\times\frac{3^3a^4}{2}\left(\frac{3}{4}-1\right)$$

$$= \frac{27}{32}\pi a b^2$$

④

(1) $L_k$ が格子点 $(l, m)$ を通るとすると　($l, m$ は整数で、$(l, m) \neq (0, 0)$)

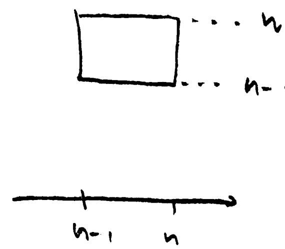
$$m = kl$$

となるが、$l \neq 0$ のとき $k = \dfrac{m}{l}$ となり、これは $k$ が無理数であることに矛盾する。

$l = 0$ のとき、$m = 0$ となり、$(l, m) \neq (0, 0)$ に矛盾する。

よって、$L_k$ は原点以外の格子点を通らない。

(2) $[x]$ を $x$ を超えない最大の整数とすると




$$\left.\begin{array}{l} [k(n-1)] < k(n-1) < [k(n-1)] + 1 \\ [kn] < kn < [kn] + 1 \end{array}\right\} \cdots ①$$

$(n-1, n-1), (n-1, n), (n, n), (n, n-1)$ の4点で囲まれる区画を $E_{n,n}$ と表すと、$L_k$ が通る区画は

$$E_{n,[k(n-1)]},\ E_{n,[k(n-1)]+1}, \cdots E_{n,[kn]}$$

となるので、$a_n = [kn] - [k(n-1)] + 1$

$$= [kn] - [k(n-1)] + 1.$$

①より、 $kn - 1 < [kn] < kn$

$$-k(n-1) < -[k(n-1)] < -k(n-1) + 1$$

辺々加えて

$$kn - 1 - k(n-1) < [kn] - [k(n-1)] < kn - k(n-1) + 1$$

$$k - 1 < [kn] - [k(n-1)] < k + 1$$

$$k < [kn] - [k(n-1)] + 1 < k + 2$$

∴ $k < a_n < k + 2$　　証明終

(3) (2) より $\displaystyle \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left\{[kn]-[k(n-1)]+1\right\}$

$$= \frac{1}{N}\left\{(\cancel{[k]}-[0])+([2k]-\cancel{[k]})+\cdots+[kN]-[k(N-1)]+N\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\left([kN]+N\right)$$

$$= \frac{1}{N}[kN]+1$$

ここで $[kN] < kN < [kN]+1$ より, $kN-1 < [kN] < kN$

が成り立つので

$$\frac{kN-1}{N}+1 < \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n < \frac{kN}{N}+1$$

$$k+1-\frac{1}{N} < \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n < k+1$$

$\displaystyle \lim_{N\to\infty}\left(k+1-\frac{1}{N}\right) = k+1$ より, はさみうちの原理より,

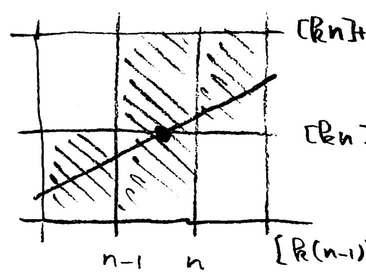
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n = \underline{k+1}$$

(4) $0<k<1$ なので $a_n \geqq k+1$ より $a_n = 2$ となる

$n$の個数を考えればよい

このとき、右図のように $n-1<x<n$ で

$y=[kn]$ と交わることになる




ここで、$0<x<N$ までのあいだ

$y=kx$ は $y=1, 2, 3, \ldots, [kN]$ までと交点を

もつことから $A_N=[kN]$ である.

(3) より $kN-1<[kN]<kN$ なので $\displaystyle \frac{kN-1}{N}<\frac{A_N}{N}<k$

$\displaystyle \lim_{N\to\infty}\frac{kN-1}{N}=k$ なので、はさみうちの原理より $\displaystyle \lim_{N\to\infty}\frac{A_N}{N}=\underline{k}.$