$\boxed{1}$ 並べ方は $4! = 24$通り.

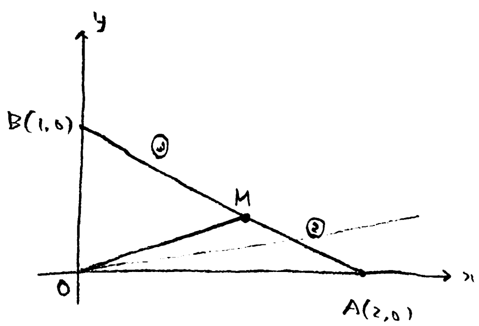
このうち 2829よりも小さいものは 2468, 2486, 2648, 2684 の4つなので <u>20個</u>

1,3,5,7,9から3つを選んで並べる総数は ${}_5P_3 = 60$

366より小さいものは 1** の ${}_4P_2$ 個 (12個) と、31* の3個、35* の3個

合計18個 だから $60-18 =$ <u>42個</u>

(2)



$$\vec{OM} = \frac{3}{5}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

OMの傾きは $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{6}{5}} = \dfrac{1}{3}$

$\angle MOA = 2\theta$ とすると $\tan 2\theta = \dfrac{1}{3}$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{3} \text{ より}$$

$$\tan^2\theta + 6\tan\theta - 1 = 0$$

$$\tan\theta = -3 \pm \sqrt{9+1} = -3 \pm \sqrt{10}.$$

図より $\tan\theta = \sqrt{10} - 3$.

これと垂直な直線の傾きは $-\dfrac{1}{\sqrt{10}-3} = \underline{-3-\sqrt{10}}$

(3) 1回の通過で x 倍になるとすると、 $x^3 = \dfrac{81}{100}$

n回で半分以下になるとすると

$$x^n \leqq \frac{1}{2}$$

$x = \left(\dfrac{81}{100}\right)^{\frac{1}{3}}$ を代入

$$\left(\frac{81}{100}\right)^{\frac{n}{3}} \leqq \frac{1}{2}$$

対数をとる

$$\frac{n}{3}\log_{10}\frac{3^4}{10^2} \leqq -\log_{10}2$$

$$\frac{n}{3}(4\times\log_{10}3 - 2) \leqq -\log_{10}2$$

$$n(1.9084-2) \leqq -3\times 0.3010$$

$$n \geqq \frac{0.9030}{0.0916} = 9.8$$

$\underline{n = 10}$

$$\begin{array}{r} 9.8 \\ 916 \overline{)\,9030} \\ 8244 \\ \hline 7860 \end{array}$$

$\boxed{\text{II}}$ (1) $1111111111_{(2)}$

$= 2^9 + 2^8 + \cdots + 2^1 + 1 = 1 \times \dfrac{2^{10}-1}{2-1} = 1023.$

$2222222_{(3)}$

$= 2\times 3^6 + 2\times 3^5 + \cdots + 2\times 3^1 + 2 = 2\times\dfrac{3^7-1}{3-1} = 3^7 - 1 = 2186$

よって $p < q$ $\underline{(3)}$

(2) $(\sqrt{3}+i)^2 = 3-1+2\sqrt{3}i = 2+2\sqrt{3}i$

$(\sqrt{3}+i)^3 = (2+2\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i) = 2\sqrt{3}+2i+6i-2\sqrt{3} = 8i$

$(\sqrt{3}+i)^6 = (8i)^2 = -64.$ $\therefore\ \underline{n=6}$

(3) $\vec{b} = (x, y)$ として. $\vec{a}\cdot\vec{b} = -3x+5y = 2.$ …①

$x=1, y=1$ はこれを満たすので $-3\cdot 1 + 5\cdot 1 = 2$ …②

①-② $-3(x-1)+5(y-1) = 0$

$5(y-1) = 3(x-1)$

左辺は5の倍数，右辺は3の倍数だから．

$x-1 = 5k.$ $y-1 = 3k.$

$x = 5k+1$ ，$y = 3k+1.$

$|\vec{b}|^2 = (5k+1)^2 + (3k+1)^2 = 34k^2+16k+2 = 34\left(k+\dfrac{4}{17}\right)^2 + 2 - \dfrac{32}{17}$

$k=0$ のとき $|\vec{b}|$ は最小となり．このとき $\vec{b} = (1,1)$ だから $\underline{|\vec{b}| = \sqrt{2}}.$

(4) $y = x^2 - 2(s-2t)x - (s-2t)(-s+2t-1) + 4(t-2)$

$= x^2 - 2(s-2t)x + s^2 - 2st + s - 2st + 4t^2 - 2t + 4t - 8$

$= x^2 - 2(s-2t)x + s^2 - 4st + 4t^2 + 2t + s - 8$

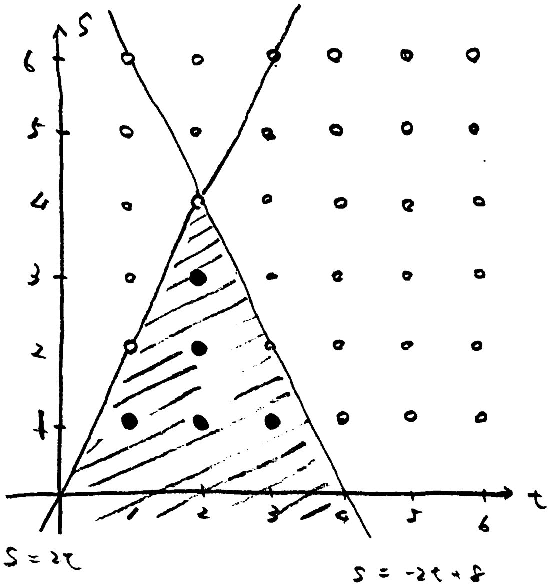
$= (x-s+2t)^2 \cancel{-(s-2t)^2} + \cancel{s^2} \cancel{-4st} + \cancel{4t^2} + 2t + s - 8$

$= (x-s+2t)^2 + 2t + s - 8$

頂点は $(s-2t,\ 2t+s-8)$

これが第3象限にあるのは $s-2t < 0.$ $2t+s-8 < 0.$

$\Leftrightarrow$ $s < 2t$, $s < -2t+8$



条件を満たすのは、$(s, t) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 2)$ の5つ

$\therefore \underline{\dfrac{5}{36}}$

[1] (1) $x^3-4x^2+4x=f(x)$, $x^3-4x^2+4x+1=g(x)$ と表す。

$f'(x)=3x^2-8x+4$ だから $f'(0)=4$. よって l の傾きは $\underline{4}$

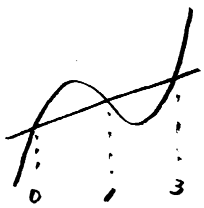
(2) l は $y=4x$. これと $y=f(x)$ を連立して

$$x^3-4x^2+4x=4x \Leftrightarrow x^2(x-4)=0.$$

$(0,0)$ 以外に、$\underline{(4,16)}$ で交わる。

(3) $f(x)=x$ を解く。

$$x^3-4x^2+4x=x \Leftrightarrow x(x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-3)=0.$$



$$\int_0^1 x^3-4x^2+3x\,dx+\int_1^3 -x^3+4x^2-3x\,dx$$

$$=\left[\frac14x^4-\frac43x^3+\frac32x^2\right]_0^1+\left[\frac14x^4-\frac43x^3+\frac32x^2\right]_3^1$$

$$=\left(\frac14-\frac43+\frac32\right)\times2-\left(\frac14\times81-\frac43\times27+\frac32\times3^2\right)$$

$$=\frac1{12}(3-16+18)\times2-\frac{3^2}{4}(9-16+6)$$

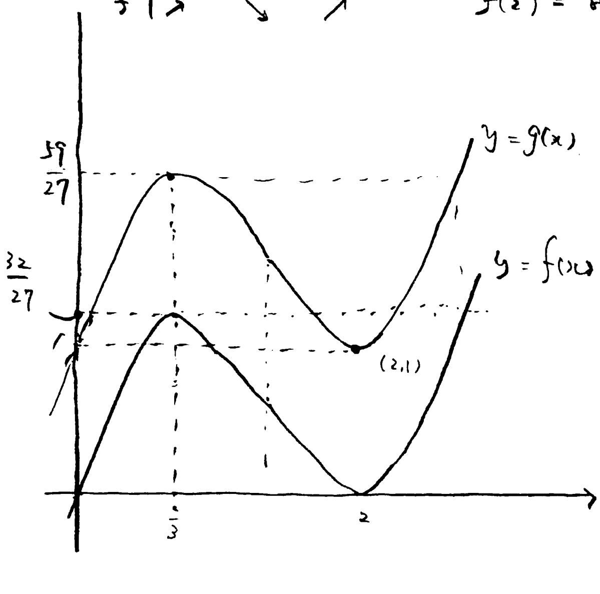
$$=\frac56+\frac94=\underline{\frac{37}{12}}$$

(4) $f'(x)=3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$

x	$\cdots$	$\frac23$	$\cdots$	2	$\cdots$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f\left(\frac23\right)=\frac8{27}-\frac{16}9+\frac83=\frac1{27}(8-48+72)=\frac{32}{27}$

$f(2)=8-16+8=0.$



(i) $n_1=2$ または $n_2=2$ のときに

$n_1\times n_2=6$ となるので

$\underline{a=1 \text{ または } a=\frac{32}{27}}$

(ii) $n_1+n_2=3$ となるのは $a=\frac{59}{27}, 0$

$n_1+n_2=5$ 〃 $a=1, \frac{32}{27}$

$\therefore a=0, 1, \frac{32}{27}, \frac{59}{27}$ の $\underline{4つ}$

IV (1) 中心 $(1, 0)$、半径 1 の円だから　$C_1 : (x-1)^2+y^2=1$

(2) $S_k = \pi \times k^2$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{10}\pi\times k^2 = \sum_{k=1}^{10}k^2 = \frac{1}{\cancel{6}}\times \cancel{10}^{5}\times 11\times \cancel{21}^{7} = \underline{385}$$

(3) $L_k = 2\pi k$

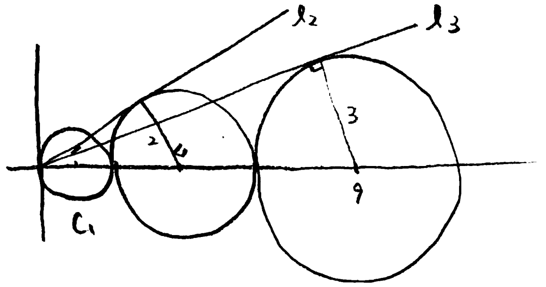
$$\pi^2\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{2\pi k\cdot 2\pi(k+1)} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{10}\right) = \underline{\frac{9}{40}}$$

(4) C_k の中心 $(k^2, 0)$ と $2x-9y=0$ との距離は

$$\frac{2k^2}{\sqrt{2^2+(-9)^2}} = \frac{2}{\sqrt{85}}k^2 > k$$ のとき共有点を持たない.

$k > \frac{\sqrt{85}}{2}$　　$4 < \frac{\sqrt{85}}{2} < 5$ だから　$k \geqq 5$ のとき共有点を持たない

5, 6, 7, 8, 9, 10 の $\underline{6\text{個}}$



$\sin\theta_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta_3 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\sin\theta_k = \frac{1}{k}$

$\cos\theta_k = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$, $\tan\theta_k = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$

$$\sum_{k=1}^{9}\left\{(1+\cos\theta_k)(1-\cos\theta_{k+1})+\cos(\theta_k-\theta_{k+1})\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{9}\left(1-\cos\theta_{k+1}+\cos\theta_k-\cancel{\cos\theta_k\cos\theta_{k+1}}+\cancel{\cos\theta_k\cos\theta_{k+1}}+\sin\theta_k\sin\theta_{k+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{9}1-\sum_{k=1}^{9}(\cos\theta_{k+1}-\cos\theta_k)+\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}$$

$$=9-\cos\theta_{10}+\cos\theta_1+\frac{9}{10}=9+\frac{9}{10}-\frac{\sqrt{99}}{10}+0=\underline{\frac{99-3\sqrt{11}}{10}}$$