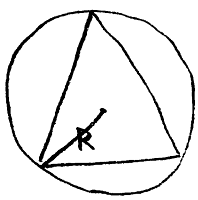
①

(1) 全体 9^4.　全て異なるのは $_9P_4$　$\dfrac{_9P_4}{9^4} = \dfrac{8\cdot7\cdot\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}\cdot9\cdot9} = \underline{\dfrac{112}{243}}$

(2)



$\frac{1}{2}\times R\times R\times\sin120^\circ\times3 = 27\sqrt{3}$

$\frac{3}{4}\cancel{\sqrt{3}}R^2 = \cancel{27}^{\,9}\cancel{\sqrt{3}}$　　$\underline{R=6}$

(3) $x=-t$

$$\lim_{t\to\infty}\left(-4t+3+\sqrt{16t^2+9}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{16t^2+9-(4t-3)^2}{\sqrt{16t^2+9}+4t-3}$$

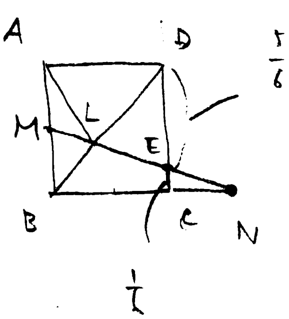
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{24}{\sqrt{16+\frac{9}{t^2}}+4-\frac{3}{t}} = \underline{3}$$

(4)

$$\frac{2\sin120^\circ\cos65^\circ+2\sin120^\circ\cos55^\circ}{\sin50^\circ+\cos50^\circ} = \frac{\sqrt{3}\times2\cos\frac{120^\circ}{2}\cos\frac{10^\circ}{2}}{\sqrt{2}\sin(50^\circ+45^\circ)}$$

$$= \sqrt{6}\,\frac{\frac{1}{2}\cos5^\circ}{\cos5^\circ} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

(5)



$\triangle NEC \sim \triangle NMB$ より $EC=\frac{1}{6}$

$ED=\frac{5}{6}$

$\triangle LED \sim \triangle LMB$ より $BL:LD=3:5$

$\therefore\ LD=\frac{5}{8}\sqrt{2}$

$AL^2 = AD^2+DL^2-2AD\cdot DL\cdot\cos45^\circ$

$= 1+\frac{25}{32}-2\cdot1\cdot\frac{5}{8}\cancel{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{17}{32}$

$AD = \frac{\sqrt{17}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{34}}{8}$

②

(1) $a_n = an$

$$a_{k-4}a_{k-1}a_k a_{k+1} = a(k-4)a(k-1)ak\,a(k+1)$$
$$= \underline{a^4 k(k+1)(k-1)(k-4)}$$

(2)
(i) $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$

$a = 1$ または 2

$a=2$のとき. $2^1 \times 3^2 \times 7 = k(k+1)(k-1)(k-4)$

$k=5$としたとき右辺は $5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 > 2^1 \times 3^2 \times 7$

よって. kは存在しない

$a=1$のとき $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = k(k+1)(k-1)(k-4)$

$k=5, 6, 7$と順にためして

$k=6$のとき $6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$ ×

$k=7$ 〃 $7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 3$ ×

$k=8$ 〃 $8 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 4 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

$\therefore \underline{(a, k) = (1, 8)}$

(ii) $(at)^3 + a^3(t+1)^3 = a^3(t+2)^3 - 2$

$$a^3(t^3 + t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - t^3 - 6t^2 - 12t - 8) = -2$$

$$a^3(t^3 - 3t^2 - 9t - 7) = -2.$$

$a = 1$, $t^3 - 3t^2 - 9t - 5 = 0$

$(t+1)(t^2 - 4t - 5) = 0$

$(t+1)(t+1)(t-5) = 0.$

$\therefore t = 5$ $a_{t+1} = \underline{6.}$

(iii) $a^2s^2 + a^2(s^2+2s+1)^2 + a^2(s^2+4s+4) + a^2(s^2+6s+9) + a^2(s^2+8s+16) + a^2(s^2+10s+25)$

$= a^2(s^2+12s+36) + a^2(s^2+14s+49) + a^2(s^2+16s+64) + a^2(s^2+18s+81) + a^2(s^2+20s+100)$

$6s^2 + 30s + 55 = 5s^2 + 80s + 330$

$s^2 - 50s - 275 = 0.$

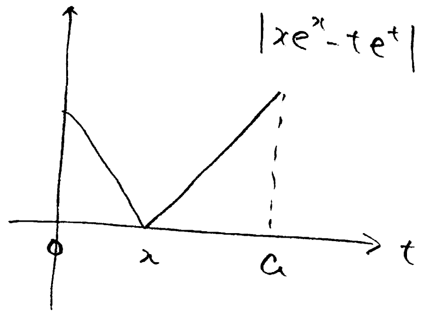
$(s-55)(s+5) = 0 \qquad s = 55, -5.$

$a_{60} = \underline{60}$

③

(1) $f(0)=\int_0^a te^t\,dt$

$=[te^t]_0^a-\int_0^a e^t\,dt$



$=\underline{ae^a-e^a+1}$ //

$f(a)=\int_0^a ae^a-te^t\,dt=\underline{a^2e^a-ae^a+e^a-1}$ //

(2) $f(x)=\int_0^x xe^x-te^t\,dt+\int_a^x xe^x-te^t\,dt$

$=[xe^x\cdot t-te^t+e^t]_0^x+[xe^x\cdot t-te^t+e^t]_a^x$

$=(x^2e^x-xe^x+e^x)\times 2-1-axe^x+ae^a-e^a$

$=(2x^2-2x+2-ax)e^x+ae^a-e^a-1$

(3) $f'(x)=(4x-2-a)e^x+(2x^2-2x+2-ax)e^x$

$=(x+1)(2x-a)e^x$

$f'(x)=0$ となるのは $x=\frac{a}{2}$

(4) $f(\frac{a}{2})=(a-1)e^a-(a-2)e^{\frac{a}{2}}-1$

x	0	…	$\frac{a}{2}$	…	a
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

$f(a)-f(0)=(a^2-2a+2)e^a-2.$

$g(a)=(a^2-2a+2)e^a$ とすると $g'(a)=(2a-2)e^a+(a^2-2a+2)e^a$

$=a^2e^a>0.$

$g(0)=2e^0-2=0$ なので $g(a)\geq g(0)=0.$

以上より $\begin{cases}\text{最小値は} & (a-1)e^a-(a-2)e^{\frac{a}{2}}-1\\ \text{最大値は} & a^2e^a-ae^a+e^a-1\end{cases}$ //

④ (1) 条件式より

$$a^3 = p(-b^3 - pc^3 + p^2abc)$$

右辺はpの倍数なので、左辺はpを因数にもつ。つまり aはpの倍数

(2) (1)より $a = a'p$ とおけるので、（a'は整数）

$$a'^3p^3 + pb^3 + p^2c^3 - p^4a'bc = 0$$

pで割って $a'^3p^2 + b^3 + pc^3 - p^3a'bc = 0$

$$b^3 = p(-a'^3p - c^3 + p^2a'bc)$$

左辺はpの倍数なので bはpの倍数、$b = pb'$とすると（b'は整数）

$$a'^3p^2 + p^3b'^3 + pc^3 - p^4a'b'c = 0$$

同様に、

$$c^3 = p(-a'^3 - pb'^3 + p^2a'b'c) = 0.$$

左辺はpの倍数なので、cはpの倍数。

(3) (2)より a, b, cはpの倍数なので、$(a, b, c) = (a'p, b'p, c'p)$
と表すことができ、これを条件に代入すると

$$a'^3 + pb'^3 + p^2c'^3 - p^3a'b'c' = 0$$

となるが、これは元の式と同じものなので a', b', c'も全てpの倍数。
つまり a', p', c' も全てpの倍数で、$(a', b', c') = (a''p, b''p, c''p)$
などと表せることになるが、これが繰り返されることは aがpを無限に
因数に持ち続けることを意味しており不合理で、これが成り立つのは
$a' = b' = c' = 0$ のときのみ。

$\therefore a = b = c = 0$

(4) x は有理数なので $\frac{x_2}{x_1}$ (x_1, x_2 は互いに素な整数で $x_1 \geqq 1$ とする)

のようにおくことができ、同様に $y = \frac{y_2}{y_1}$, $z = \frac{z_2}{z_1}$ と表せる.

このとき、

$$\frac{x_2^3}{x_1^3} + p\frac{y_2^3}{y_1^3} + p^2\frac{z_2^3}{z_1^3} - p^3\frac{x_2 y_2 z_2}{x_1 y_1 z_1} = 0$$

$$(x_2 y_1 z_1)^3 + p(y_2 x_1 z_1)^3 + p^2(x_1 y_1 z_2)^3 - p^3 x_2 y_2 z_2 x_1^2 y_1^2 z_1^2 = 0$$

$$(x_2 y_1 z_1)^3 + p(y_2 x_1 z_1)^3 + p^2(x_1 y_1 z_2)^3 - p^3(x_2 y_1 z_1)(y_2 x_1 z_1)(x_1 y_1 z_2) = 0$$

このとき

(3) より $x_2 y_1 z_1 = y_2 x_1 z_1 = x_1 y_1 z_2 = 0$

となる。x_1, y_1, z_1 は 0 ではないので $x_2 = y_2 = z_2 = 0$.

よって. $x = y = z = 0$.