東京大学2023

1 (1) $\sqrt{k\pi} \leqq x \leqq \sqrt{(k+1)\pi}$ のとき $\dfrac{x}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq 1 \leqq \dfrac{x}{\sqrt{k\pi}}$ だから

$$\frac{x}{\sqrt{(k+1)\pi}}\left|\sin(x^2)\right| \leqq \left|\sin(x^2)\right| \leqq \frac{x}{\sqrt{k\pi}}\left|\sin(x^2)\right|$$

$\sqrt{k\pi} \leqq x \leqq \sqrt{(k+1)\pi}$ で積分

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} x\left|\sin(x^2)\right|dx \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} x\left|\sin(x^2)\right|dx \quad \cdots ①$$

ここで $\sqrt{k\pi} \leqq x \leqq \sqrt{(k+1)\pi}$ のとき $k\pi \leqq x^2 \leqq (k+1)\pi$ だから $\sin(x^2)$ は常に0以上、
または0以下となるので

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} x\left|\sin(x^2)\right|dx = \left|\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} x\sin(x^2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}\cos(k+1)\pi - \frac{1}{2}\cos k\pi\right| = \left|\frac{1}{2}(-1)^{k+1} - \frac{1}{2}(-1)^k\right| = \frac{1}{2}\left|(-1)^k(-1-1)\right| = 1 \quad \cdots ②$$

①②より $\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}$ が示された。

(2) (1)の不等式について $k = n, n+1, n+2, \cdots, 2n-1$ としたものを辺々を加える

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \sum_{k=n}^{2n-1}A_k \leqq \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

$\frac{1}{\sqrt{n}}$倍して
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}\left|\sin(x^2)\right|dx \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \cdots ③$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{n}\pi}} = \int_1^2\frac{1}{\sqrt{x\pi}}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{\pi}} \quad \cdots ④$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}\sqrt{\pi}} = \int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}}dx = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{\pi}} \quad \cdots ⑤$$

③④⑤より、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}B_n = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{\pi}}$$

2

(1) 玉を全て区別する。

全ての並べ方は 12!

黒玉と白玉を先に並べ(8!) その並びの9ヶのスキマに赤玉を並べる ${}_9P_4$

$$P = \frac{8!\ {}_9P_4}{12!} = \frac{\cancel{9}\cdot\overset{4\ 2}{\cancel{8}}\cdot7\cdot\cancel{6}}{\cancel{12}\cdot11\cdot\underset{5}{\cancel{10}}\cdot\cancel{9}} = \mathbf{\frac{14}{55}}$$

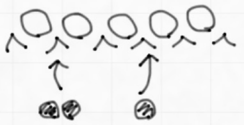
(2) 赤玉も黒玉もとなりあわない確率をもとめる。

まず白玉を先に並べる 5!

(i) 黒玉がとなりあわないように並べる ${}_6P_3$

このとき、赤玉をできあがった黒玉と白玉の列のスキマに並べる ${}_9P_4$　　${}_6P_3\times{}_9P_4$

(ii) 黒玉のペアともう1つをとなりあわないように並べる

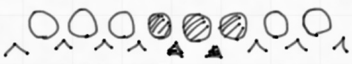
(例) 

ペアの作り方 ${}_3P_2$　スキマへの並べ方 ${}_6P_2$

最後に赤玉をスキマに並べるが、となりあった黒玉のあいだには必ず並べる

$${}_1C_1\times{}_{(9-1)}C_3\times4!$$

まとめると ${}_3P_2\times{}_6P_2\times{}_8C_3\times4!$

(例) 

(iii) 黒玉3つを1つの固まりとしてスキマにいれる。

黒玉の並びが 3!　スキマは 6ヶ所

最後に黒玉の3つの並びの2ヶ所のスキマと他のスキマの2ヶ所に赤玉を並べる

${}_2C_2\times{}_{(9-2)}C_2\times4!$　　まとめると $3!\times6\times{}_7C_2\times4!$

赤も黒もとなり合わない確率は

$$\frac{5!}{12!}\left({}_6P_3\times{}_9P_4+{}_3P_2\times{}_6P_2\times{}_8C_3\times4!+3!\times6\times{}_7C_2\times4!\right)$$

$$=\frac{5!}{12!}\left(\boxed{6\cdot5\cdot4}\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6+3\cdot2\cdot6\cdot5\cdot8\cdot7\cdot\boxed{4\cdot3\cdot2}+3\cdot2\cdot6\cdot7\cdot3\cdot\boxed{4\cdot3\cdot2}\right)$$

$$=\frac{5!}{12!}\times4\cdot3\cdot2\cdot7\cdot6\left(9\cdot8\cdot5+3\cdot2\cdot5\cdot8+3\cdot2\cdot3\right)$$

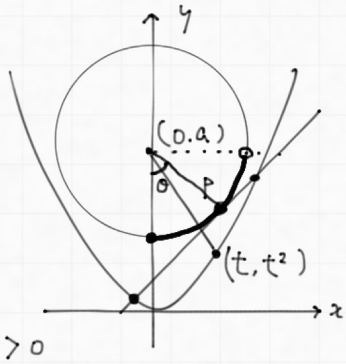
$$=\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}(3\cdot4\cdot5+5\cdot8+3)}{\cancel{12}\cdot11\cdot10\cdot\underset{3}{\cancel{9}}\cdot\underset{2}{\cancel{8}}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}}=\frac{103}{11\cdot10\cdot3\cdot2}$$

$$q=\frac{103}{11\cdot10\cdot3\cdot2}\div\frac{14}{55}=\frac{103\cdot\cancel{55}}{\cancel{11}\cdot\underset{2}{\cancel{10}}\cdot3\cdot2\cdot14}=\mathbf{\frac{103}{168}}$$

3 (1) $a \leqq 0$のときは成立しないので $a > 0$

$y = x^2$上の点(t, t^2)と円の中心$(0, a)$との距離が

tの値にかかわらず1より大きければよい



$$\sqrt{t^2 + (t^2 - a)^2} > 1$$

2乗して $\quad t^4 - (2a-1)t^2 + a^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(t^2 - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + a - \frac{5}{4} > 0$

$\frac{2a-1}{2} \geqq 0$のとき、$t^2 = \frac{2a-1}{2}$のときに成り立てばよく $a - \frac{5}{4} > 0 \qquad a > \frac{5}{4}$

$\frac{2a-1}{2} < 0$のとき $\quad t = 0$のときに成り立てばよく、$a > 1$ $\quad$ 範囲なし。

以上より、条件を満たすのは $\boldsymbol{a > \frac{5}{4}}$ のとき

(2) 円の中心とPを結ぶ線分とy軸負の向きのなす角をθとおく(右上図) $\quad \left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

このとき、点Pは$(\sin\theta, a - \cos\theta)$となる。

円Cの式は $\quad x^2 + (y-a)^2 = 1$ だからPにおける接線は

$$(\sin\theta)x + (\cos\theta)(y - a) = 1$$

これと$y = x^2$との交点のx座標は、

$$(\sin\theta)x + (\cos\theta)x^2 - a\cos\theta = 1$$

$$(\cos\theta)x^2 + (\sin\theta)x - a\cos\theta - 1 = 0$$

の解であり、解をα, β (α, βは$\alpha < \beta$を満たす実数)とすると、

$$\alpha + \beta = -\tan\theta \qquad \alpha\beta = -a - \frac{1}{\cos\theta}$$

接線の傾きが$-\tan\theta$となることを考えて

$$L_P = \sqrt{1 + (-\tan\theta)^2}\,|\beta - \alpha| = \frac{1}{\cos\theta}|\beta - \alpha|$$

$$L_P^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}\left\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\right\} = \frac{1}{\cos^2\theta}\left(\tan^2\theta + 4a + \frac{4}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 + 4a + \frac{4}{\cos\theta}\right)$$

ここで $\frac{1}{\cos\theta} = p$とおくと、$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$より $\quad 0 < \cos\theta \leqq 1$だから $\quad p \geqq 1$であり、

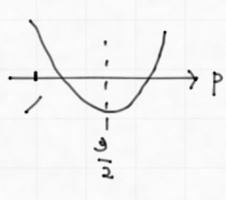
$$L_P^2 = p^2(p^2 - 4p + 4a - 1)$$

これを$f(p)$とすると、

$$f'(p) = 4p^3 - 12p^2 + 2p(4a-1) = 2p(2p^2 - 6p + 4a - 1) = 2p\left\{2\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{8a - 11}{2}\right\}$$

以下 $2p^2 - 6p + 4a - 1 = g(p)$ とする

(i) $8a - 11 < 0$のとき、$\left(\frac{5}{4} < a < \frac{11}{8}\right)$ $\qquad g(1) = 4a - 5 > 0$だから $g(p)$のグラフは

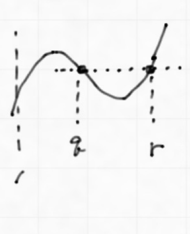


左のようになり、$f(p)$のグラフは $p \geqq 1$で

極大値と極小値をもつ したがって $q \geqq 1, r \geqq 1 \quad q \neq r$

を満たす実数q, rを用いて $f(q) = f(r)$となるような

q, rは存在する



(ii) $8a-11 \geqq 0$ のとき $\left(a \geqq \frac{11}{8}\right)$

このとき $p \geqq 1$ で $g(p) \geqq 0$ だから $f'(p) \geqq 0$ となる

これは $p \geqq 1$ で $f(p)$ が単調に増加することを示しており、$q \geqq 1$、$r \geqq 1$、$q \neq r$ を

満たす実数 q, r に対し、$f(q) \neq f(r)$ となる.

(i)(ii) より、$L_Q = L_R$ となるような Q, R が存在する条件は $\frac{5}{4} < a < \frac{11}{8}$

4 (1) P(x, y, z) とおく.（x, y, z は実数）

$\vec{OP}\perp\vec{OA}$ より　$2x=0 \Leftrightarrow x=0$

$\vec{OP}\perp\vec{OB}$ より　$x+y+z=0$　　$x=0$ だから　$y+z=0$

$\vec{OP}\cdot\vec{OC}=1$ より　$x+2y+3z=1$　　$x=0,\ y+z=0$ と連立して　$y=-1,\ z=1$

∴ **P$(0, -1, 1)$**

(2) Hは直線AB上にあるので $\vec{OH}=s\vec{OA}+(1-s)\vec{OB}$ と表せる（sは実数）

PH⊥AB だから　$\vec{PH}\cdot\vec{AB}=0$

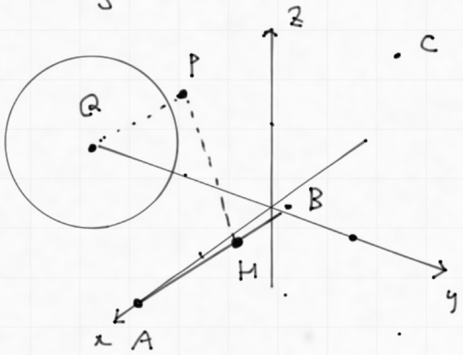
$$(\vec{OH}-\vec{OP})\cdot(\vec{OB}-\vec{OA}) = (s\vec{OA}+(1-s)\vec{OB}-\vec{OP})\cdot(\vec{OB}-\vec{OA})$$

$$= s\vec{OA}\cdot\vec{OB}-s|\vec{OA}|^2+(1-s)|\vec{OB}|^2-(1-s)\vec{OA}\cdot\vec{OB}-\vec{OP}\cdot\vec{OB}+\vec{OP}\cdot\vec{OA}$$

$$= 2s-4s+3(1-s)-2(1-s)-0-0 = 1-3s=0$$

$s=\frac{1}{3}$

$$\vec{OH}=\frac{1}{3}\vec{OA}+\frac{2}{3}\vec{OB}$$



(3) (1)より OP は平面OABと垂直だから, Sと平面OABとの交線は中心が $\frac{3}{4}\vec{OA}$ の円となる. この点をRとし, Rから OHに下ろした垂線の足をTとすると

$\angle RTO = \angle AHO = 90°$

だから, $\triangle ORT \backsim \triangle OAH$ より　$\vec{OT}=\frac{3}{4}\vec{OH}=\frac{1}{4}\vec{OA}+\frac{2}{4}\vec{OB}$

半径rが大きくなったとき, Sが最初に△OHBと共有点を持つのは, この点Tで

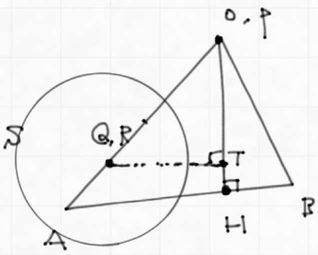
$$\vec{QT}=\vec{OT}-\vec{OQ}=\frac{1}{4}\vec{OA}+\frac{2}{4}\vec{OB}-\frac{3}{4}\vec{OA}-\vec{OP}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$|\vec{QT}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$|\vec{OR}|=\frac{3}{4}|\vec{OA}|=\frac{3}{2},\quad |\vec{BR}|=\left|\frac{3}{4}\vec{OA}-\vec{OB}\right|=\left|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\-1\end{pmatrix}\right|=\frac{3}{2}$$

だから $|\vec{QO}|=|\vec{QB}|=\left|\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+1+1}=\frac{\sqrt{17}}{2}$



真上から見た図（OAB平面に対して）

以上より, $\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{2}\leqq r\leqq\frac{\sqrt{17}}{2}}$ のとき, S は三角形OBHと共有点をもつ

5 (1) $g(x)$ を $f(x)$ で割った商を $s(x)$ と表す.

条件より $g(x)=f(x)s(x)+r(x)$

$$g(x)^7=\left(f(x)s(x)+r(x)\right)^7$$

$$={}_7C_0f(x)^7s(x)^7+{}_7C_1f(x)^6s(x)^6r(x)+{}_7C_2f(x)^5s(x)^5r(x)^2+$$

$$\cdots+{}_7C_6f(x)s(x)r(x)^6+{}_7C_7r(x)^7$$

$$=\underline{f(x)\left({}_7C_0f(x)^6s(x)^7+{}_7C_1f(x)^5s(x)^6r(x)+\cdots+{}_7C_6s(x)r(x)^6\right)}+r(x)^7$$

上式の下線部は $f(x)$ で割り切れるので. $g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りは等しい.

(2) (1) で $g(x)$ を $h(x)^7$ とすると $\{h(x)^7\}^7$ と $h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しい.

これを

$$\{h(x)^7\}^7\equiv h_1(x)^7$$

と表すことにする. 条件より.

$$h_1(x)^7\equiv h(x)$$

が成り立つので. 2式から $h(x)^{49}\equiv h(x)$

すなわち $h(x)^{49}-h(x)\equiv 0$ …①

が成り立つ. 上式の左辺を $P(x)$ とおく

① が成り立つための必要十分条件は. $P(1)=0$, $P(2)=0$, $P'(1)=0$ が成り立つことで

$$P(1)=h(1)^{49}-h(1)=(1+a+b)^{49}-(1+a+b)=0 \quad \cdots ②$$

$$P(2)=(4+2a+b)^{49}-(4+2a+b)=0 \quad \cdots ③$$

$$P'(x)=49h(x)^{48}\times h'(x)-h'(x)=(49h(x)^{48}-1)\times(2x+a)$$

$$P'(1)=\{49(1+a+b)^{48}-1\}(2+a)=0 \quad \cdots ④$$

② が成り立つのは $1+a+b=-1, 0, 1$ のとき.

(i) $1+a+b=-1$ のとき. $(a+b=-2)$

このとき ④ より. $a=-2$, $b=0$ これは ③ を満たす.

(ii) $1+a+b=0$ のとき $(a+b=-1)$

このとき. ④ より $a=-2$, $b=1$ これは ③ を満たす

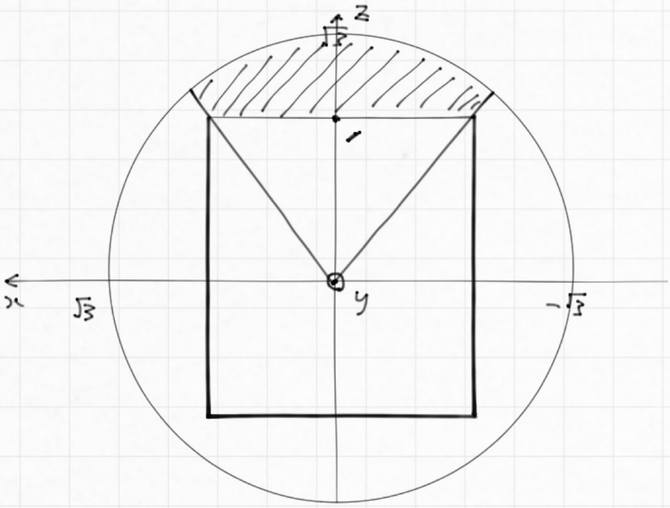
(iii) $1+a+b=1$ のとき. $(a+b=0)$

このとき. ④ より $a=-2$, $b=2$ これは ③ を満たさない

以上 (i)(ii)(iii)より $(a, b)=$ **$(-2, 0), (-2, 1)$**

6

(1) Oから立方体の頂点までの距離は$\sqrt{3}$だから、
立方体は中心O、半径$\sqrt{3}$の球に内接している。
よってVは立方体および右図の斜線部分の体積となる。



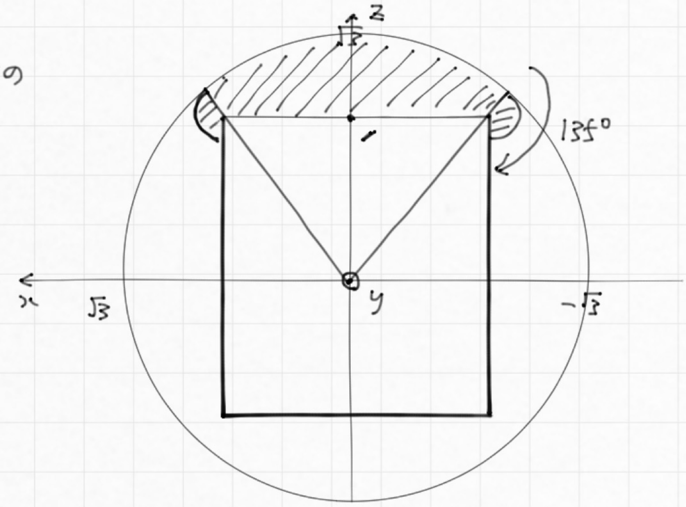
斜線部分の立体6つと立方体を併せると半径$\sqrt{3}$の球が完成するので、斜線部の体積は、

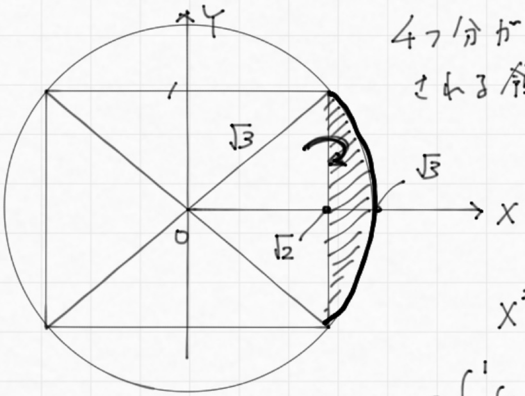
$$\frac{4}{3}\pi\sqrt{3}^3\times\frac{1}{6}-2^3\times\frac{1}{6}$$

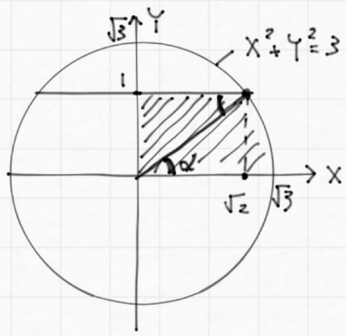
これに立方体の体積を加えて、

$$V=\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}-\frac{4}{3}+8=\mathbf{\frac{20}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$

(2) 立方体の隣りあう2つの頂点と原点を通る平面での断面は次のようになる。このときの斜線部を右図のように135°分だけ回転させたときの体積4つ分が(1)に追加される領域となる







$X^2+Y^2=\sqrt{3}^2$ として

$$2\int_0^1(X-\sqrt{2})^2\pi\,dY\times\frac{135^\circ}{360^\circ}=\frac{3\pi}{4}\int_0^1 3-Y^2-2\sqrt{2}\sqrt{3-Y^2}+2\,dY$$

$$=\frac{3\pi}{4}\int_0^1 5-Y^2\,dY-\frac{3\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1\sqrt{3-Y^2}\,dY$$

$$=\frac{3\pi}{4}\left[5Y-\frac{1}{3}Y^3\right]_0^1-\frac{3\pi}{\sqrt{2}}\times\left(\cancel{\pi}\cdot\sqrt{3}^2\times\frac{\alpha}{2\cancel{\pi}}+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1\right)$$

$$=\frac{7}{2}\pi-\frac{9\sqrt{2}\pi\alpha}{4}-\frac{3}{2}\pi=2\pi-\frac{9\sqrt{2}\pi\alpha}{4}$$

$$W=V+4\left(2\pi-\frac{9\sqrt{2}\pi\alpha}{4}\right)=\mathbf{\frac{20}{3}+8\pi-9\sqrt{2}\pi\alpha+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$